2024年度　3教科型学部個別入試A方式（理工学部）

数　学

1 解答　**[1]ア.** $-2<a<-\dfrac{\sqrt{7}}{2}$　**イ.** $-\dfrac{\sqrt{7}}{2}<a<\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

[2]ウ. $\dfrac{\pi}{8}$　**エ.** $-\sqrt{2}+1$　**[3]オ.** 36　**カ.** 113

2 解答　$f(x)=\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}\quad(x>0)$

(1)

$$f'(x)=\frac{\dfrac{1}{x}\cdot\sqrt{x}-\log x\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2}$$

$$=\frac{2-\log x}{2x\sqrt{x}}$$

$f'(x)=0$ とすると　$x=e^2$

よって，$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{2}{e}$	$\searrow$

ゆえに，$f(x)$ は $x=e^2$ のとき，極大値 $\dfrac{2}{e}$ をとる。……(答)

(2)　(1)の増減表より，$f(x)$ は $0<x<e^2$ の範囲で単調に増加する。

よって，$2<e<3$ より $3<e^2$ であるので

$$f(2)<f(3)$$

が成り立つ。したがって

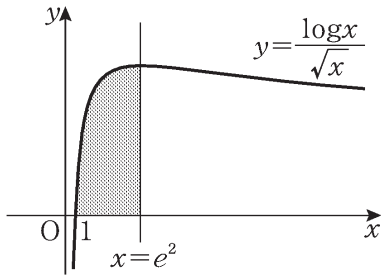
$$\frac{\log 2}{\sqrt{2}}<\frac{\log 3}{\sqrt{3}}$$

より　$\log 2^{\sqrt{3}}<\log 3^{\sqrt{2}}$

底 $e>1$ より

$2^{\sqrt{3}}<3^{\sqrt{2}}$　……(答)

(3) $f(x)=0$ となる x は $x=1$ より，求める面積は



$$S=\int_1^{e^2}\frac{\log x}{\sqrt{x}}dx$$

$$=\int_1^{e^2}(2x^{\frac{1}{2}})'\log x dx$$

$$=\left[2x^{\frac{1}{2}}\log x\right]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}2x^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=2e\cdot 2-\int_1^{e^2}2x^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$=4e-2\left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^{e^2}$$

$$=4e-4(e-1)=4 \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(4) $$V=\int_1^{e^2}\pi\left(\frac{\log x}{\sqrt{x}}\right)^2dx$$

$$=\pi\int_1^{e^2}\frac{(\log x)^2}{x}dx$$

$t=\log x$ とおくと

x	$1 \to e^2$
t	$0 \to 2$

$$dt=\frac{1}{x}dx$$

よって

$$V=\pi\int_0^2 t^2dt=\pi\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2=\frac{8}{3}\pi \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

3 解答

$$f(x)=x^4-5x^3+5x^2+17x-36$$
$$g(x)=x^3-2x^2-x+16$$

(1) 下の筆算より，求める商は $x-3$，余りは $-2x+12$ である。

……(答)

$$\begin{array}{r|l}
 & x-3 \\ \hline
x^3-2x^2-x+16 & x^4-5x^3+5x^2+17x-36 \\
 & x^4-2x^3-\ \ x^2+16x \\ \hline
 & -3x^3+6x^2+\ \ x-36 \\
 & -3x^3+6x^2+3x-48 \\ \hline
 & -2x+12
\end{array}$$

(2)　(1)より

$$f(x)=(x-3)g(x)-2x+12$$

であるので

$$f(\alpha)=(\alpha-3)g(\alpha)-2\alpha+12$$

すなわち

$$\{g(\alpha)-2\}\alpha+\{-f(\alpha)-3g(\alpha)+12\}=0$$

が成り立つ。よって，ある虚数 α に対して $f(\alpha)$ と $g(\alpha)$ がともに実数となるとき，$g(\alpha)-2$，$-f(\alpha)-3g(\alpha)+12$ はともに実数であるので

$$\begin{cases} g(\alpha)-2=0 \\ -f(\alpha)-3g(\alpha)+12=0 \end{cases}$$

これを解くと

$$f(\alpha)=6,\ g(\alpha)=2 \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(3)　$g(\alpha)=2$ より

$$\alpha^3-2\alpha^2-\alpha+16=2$$

$$\alpha^3-2\alpha^2-\alpha+14=0$$

$$(\alpha+2)(\alpha^2-4\alpha+7)=0$$

α は虚数であるので　　$\alpha\neq-2$

$\therefore\quad \alpha=2\pm\sqrt{3}\,i$

このとき

$$f(\alpha)=(\alpha-3)\cdot2-2\alpha+12=6$$

となり，(2)の条件を満たす。よって

$$\alpha=2\pm\sqrt{3}\,i \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

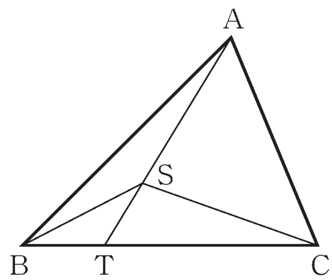
4 解答

(1)　BT：TC＝△SAB：△SAC＝2：5　……(答)

AT：ST＝△ABC：△SBC

＝(2＋3＋5)：3

＝10：3



よって　　AS：ST＝7：3　……(答)

(2)　(1)より

$$\overrightarrow{\mathrm{AS}}=\frac{7}{10}\overrightarrow{\mathrm{AT}}$$

$$=\frac{7}{10}\cdot\frac{5\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2+5}$$

$$=\frac{5\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{10}\quad\cdots\cdots(答)$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AS}}+b\overrightarrow{\mathrm{BS}}+c\overrightarrow{\mathrm{CS}}=\overrightarrow{\mathrm{AS}}+b(\overrightarrow{\mathrm{AS}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})+c(\overrightarrow{\mathrm{AS}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})$

$$=\frac{5\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{10}+b\left(\frac{5\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{10}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$$

$$+c\left(\frac{5\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{10}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$$

$$=\frac{1-b+c}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1+b-4c}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AS}}+b\overrightarrow{\mathrm{BS}}+c\overrightarrow{\mathrm{CS}}=\vec{0}$ が成り立つのは，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\not\parallel\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より

$$\begin{cases}\dfrac{1-b+c}{2}=0\\[2mm]\dfrac{1+b-4c}{5}=0\end{cases}$$

のとき。これを解くと

$$\begin{cases}b=\dfrac{5}{3}\\[2mm]c=\dfrac{2}{3}\end{cases}\quad\cdots\cdots(答)$$