

数 学

1

解答

[1] アイ. -5 ウエ. -3

[2] オカ. -3 キク. -2

[3] ケ. 9 コ. 6 [4] サシ. -4 [5] ス. 2 セ. 3 ソ. 3

[6] タ. 8 チ. 3 ツ. 5

2

解答

[1] ア. 3 イ. 2 ウ. 1 エ. 6 オ. 1

カ. 2 キ. 5 ク. 6

[2] ケ. 4 コ. 1 サ. 2 シ. 3

3

解答

(1) $f'(x) = 3x^2 - 10x + 8$ から $f'(1) = 3 - 10 + 8 = 1$ であることと, $f(1) = 1 - 5 + 8 - 3 = 1$ であることから, $y = f(x)$ の $(1, f(1))$ における接線 l の方程式は

$$y = 1 \cdot (x - 1) + 1$$

より $y = x$ ……(答)

(2) $f(2) = 8 - 20 + 16 - 3 = 1$, $f(3) = 27 - 45 + 24 - 3 = 3$ より, 2 次関数 $y = g(x)$ は $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(3, 3)$ を通る。実数 a , b , c を用いて $g(x) = ax^2 + bx + c$ とおくと

$$(1, 1) \text{ を通るので } 1 = a + b + c \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$(2, 1) \text{ を通るので } 1 = 4a + 2b + c \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$(3, 3) \text{ を通るので } 3 = 9a + 3b + c \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

② $-\$ ①, ③ $-\$ ① より

$$\begin{cases} 3a + b = 0 \\ 8a + 2b = 2 \end{cases}$$

これを解いて $a = 1$, $b = -3$

①に代入すると $c=3$

よって、求める $g(x)$ は

$$g(x)=x^2-3x+3 \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

別解 $y=g(x)$ が $(1, 1)$, $(2, 1)$ を通ることから, $y=g(x)$ を y 軸方向に -1 平行移動すると $(1, 0)$, $(2, 0)$ を通る。これより

$$y-1=a(x-1)(x-2)$$

とかける。 $g(x)-1=a(x-1)(x-2)$ より

$$g(x)=a(x-1)(x-2)+1$$

$y=g(x)$ は $(3, 3)$ を通るので、これを代入して

$$3=a\cdot 2\cdot 1+1 \quad \therefore a=1$$

よって

$$g(x)=(x-1)(x-2)+1=x^2-3x+3$$

$$\begin{aligned} (3) \quad f(x)-g(x) &= x^3-5x^2+8x-3-(x^2-3x+3) \\ &= x^3-6x^2+11x-6 \\ &= (x-1)(x-2)(x-3) \end{aligned}$$

であるから, $f(x)-g(x)$ は $1<x<2$ で正の値, $2<x<3$ で負の値をとる。

よって

$$|f(x)-g(x)| = \begin{cases} f(x)-g(x) & (1 \leq x \leq 2) \\ g(x)-f(x) & (2 \leq x \leq 3) \end{cases}$$

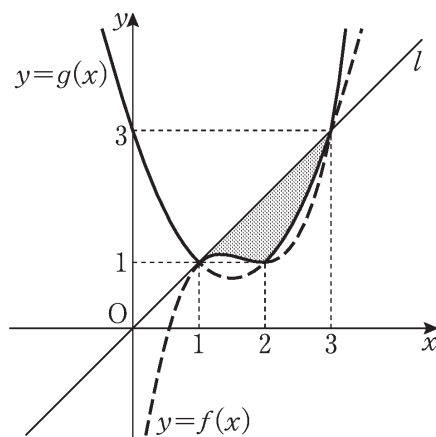
したがって

$$\begin{aligned} & \int_1^3 |f(x)-g(x)| dx \\ &= \int_1^2 \{f(x)-g(x)\} dx + \int_2^3 \{g(x)-f(x)\} dx \\ &= \int_1^2 (x-1)(x-2)(x-3) dx - \int_2^3 (x-1)(x-2)(x-3) dx \\ &= \int_1^2 (x-2+1)(x-2)(x-2-1) dx \\ & \qquad \qquad \qquad - \int_2^3 (x-2+1)(x-2)(x-2-1) dx \\ &= \int_1^2 \{(x-2)^3 - (x-2)\} dx - \int_2^3 \{(x-2)^3 - (x-2)\} dx \\ &= \left[\frac{1}{4}(x-2)^4 - \frac{1}{2}(x-2)^2 \right]_1^2 - \left[\frac{1}{4}(x-2)^4 - \frac{1}{2}(x-2)^2 \right]_2^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 0 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 0 \right) \\
&= \frac{1}{2} \quad \dots\dots (\text{答})
\end{aligned}$$

(4) (3) より $1 < x < 2$ で $f(x) > g(x)$,
 $2 < x < 3$ で $f(x) < g(x)$ であることと,
 $f(x) = g(x)$ となる x は $x = 1, 2, 3$ の 3
 つであることから, $y = h(x)$ のグラフは右
 図太線部となる。

右図において, 直線 l は $x = 1$ で $y = f(x)$
 に接し, 直線 l も $y = f(x)$ も $(3, 3)$ を通
 ることから, 求める面積は右図の網かけ部
 分である。



$y = f(x)$ と直線 l は $x = 1$ で接し, $x = 3$ で交わることから
 $x^3 - 5x^2 + 8x - 3 = x$ は $x = 1$ を重解にもち, $x = 3$ を解にもつ。

$$\text{よって} \quad x^3 - 5x^2 + 8x - 3 - x = (x-1)^2(x-3)$$

$y = g(x)$ と直線 l は $x = 1$ と $x = 3$ で交わることから $x^2 - 3x + 3 = x$ は
 $x = 1, 3$ を解にもつ。

$$\text{よって} \quad x^2 - 3x + 3 - x = (x-1)(x-3)$$

これらを用いると, 求める面積 S は

$$\begin{aligned}
S &= \int_1^2 \{x - (x^3 - 5x^2 + 8x - 3)\} dx + \int_2^3 \{x - (x^2 - 3x + 3)\} dx \\
&= \int_1^2 \{-(x-1)^2(x-3)\} dx + \int_2^3 \{-(x-1)(x-3)\} dx \\
&= \int_1^2 \{-(x-1)^2(x-1-2)\} dx + \int_2^3 \{-(x-3+2)(x-3)\} dx \\
&= \int_1^2 \{-(x-1)^3 + 2(x-1)^2\} dx + \int_2^3 \{-(x-3)^2 - 2(x-3)\} dx \\
&= \left[-\frac{1}{4}(x-1)^4 + \frac{2}{3}(x-1)^3 \right]_1^2 + \left[-\frac{1}{3}(x-3)^3 - (x-3)^2 \right]_2^3 \\
&= -\frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 + (-1)^2 \\
&= \frac{13}{12} \quad \dots\dots (\text{答})
\end{aligned}$$