数　学

I 解答

(1)**ア．** 6　**イ．** $3+\sqrt{2}$　**ウ．** -6

(2)**エ．** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　**オ．** $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$　**カ．** 5　**キ．** -3

(3)**ク．** 54　**ケ．** 32　**コ．** 2187

II 解答

(1)　$f(x)=x^2+2$ とおくと　　$f'(x)=2x$

ゆえに　　$f'(2)=4$

よって，点 $(2,\ 6)$ における接線の方程式は　　$y-6=4(x-2)$

すなわち　　$y=4x-2$　……(答)

(2)　C と l_2 の接点の座標を $(a,\ a^2+2)$ とすると，l_2 の方程式は

$$y-(a^2+2)=2a(x-a)$$

すなわち　　$y=2ax-a^2+2$

この直線が点 $(-1,\ -6)$ を通るので　　$-6=-2a-a^2+2$

整理して因数分解すると　　$(a+4)(a-2)=0$

l_2 の傾き $2a$ は負であるから　　$a=-4$

よって，l_2 の方程式は　　$y=-8x-14$　……(答)

(3)　l_1 と l_2 の交点の x 座標は，$4x-2=-8x-14$ より

$$x=-1$$

区間 $-4\leqq x\leqq -1$ では　　$x^2+2\geqq -8x-14$

区間 $-1\leqq x\leqq 2$ では　　$x^2+2\geqq 4x-2$

よって，求める面積は

$$\int_{-4}^{-1}\{(x^2+2)-(-8x-14)\}dx+\int_{-1}^{2}\{(x^2+2)-(4x-2)\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+4x^2+16x\right]_{-4}^{-1}+\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_{-1}^{2}$$

$$=9+9=18 \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

III 解答

(1) △ABC に余弦定理を適用して

$$\cos\angle\mathrm{ABC}=\frac{6^2+5^2-4^2}{2\cdot6\cdot5}=\frac{3}{4} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

また，$\sin\angle\mathrm{ABC}>0$ であるから

$$\sin\angle\mathrm{ABC}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

よって，△ABC の面積は

$$S=\frac{1}{2}\cdot5\cdot6\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$=\frac{15\sqrt{7}}{4} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) AP は ∠BAC の二等分線だから　　BP：CP＝AB：AC

すなわち　　BP：CP＝3：2

よって　　$\mathrm{BP}=\frac{3}{5}\mathrm{BC}=3$ ……(答)

△ABP に余弦定理を適用して

$$\mathrm{AP}^2=6^2+3^2-2\cdot6\cdot3\cdot\frac{3}{4}=18$$

$\mathrm{AP}>0$ であるから　　$\mathrm{AP}=3\sqrt{2}$ ……(答)

(3) △BPQ と △APC は相似であるから

PQ：PC＝BP：AP

PQ：2＝3：$3\sqrt{2}$

ゆえに　　$\mathrm{PQ}=\frac{6}{3\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ ……(答)

これより，AP：PQ＝3：1 であるから，△BCQ の面積は

$$\frac{1}{3}\times\frac{15\sqrt{7}}{4}=\frac{5\sqrt{7}}{4}$$

よって，四角形 ABQC の面積は

$$T=\frac{15\sqrt{7}}{4}+\frac{5\sqrt{7}}{4}=5\sqrt{7} \quad \cdots\cdots(答)$$