数 学

1 解答

(1)(ア) -11 (イ) 7 (ウ) $4\sqrt{13}$

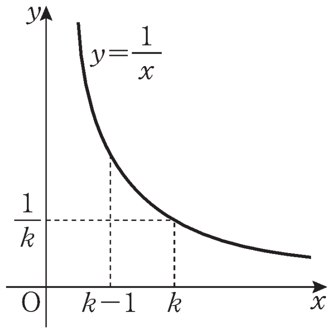
(2)(エ) 4 (オ) $2\sqrt{2}$ (カ) $2-\sqrt{2}$

(3)(キ) $\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$ (ク) $\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{3}{2},\ 2\right)$ (ケ) $\dfrac{15}{2}$

(4)(コ) 24 (サ) 5600 (シ) 283

2 解答

(1) kを2以上の自然数とする。



$k-1<x<k$ において，$\dfrac{1}{k}<\dfrac{1}{x}$ が成り立つから

$$\int_{k-1}^{k}\frac{dx}{k}<\int_{k-1}^{k}\frac{dx}{x} \qquad \therefore \quad \frac{1}{k}<\int_{k-1}^{k}\frac{dx}{x}$$

よって，$n \geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}<\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{dx}{x}=\int_{1}^{n}\frac{dx}{x}=\Big[\log x\Big]_{1}^{n}=\log n$$

（証明終）

(2) $f(x)=x+\dfrac{x}{x+1}-2\log(x+1)$ より

$$f'(x)=1+\frac{1\cdot(x+1)-x\cdot 1}{(x+1)^2}-\frac{2}{x+1}$$

$$=\frac{x^2}{(x+1)^2}$$

よって，$x>0$ のとき，$f'(x)>0$ が成り立ち，$f(x)$ は単調に増加する。

$f(0)=0$ であるから，$f(x)>0$ が成り立つ。

また，自然数 n に対して

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-2\log\left(1+\frac{1}{n}\right)>0$$

すなわち

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}>2\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$ （証明終）

(3)　(2)の不等式より，k が自然数のとき

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}>2\{\log(k+1)-\log k\}$$

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)>2\sum_{k=1}^{n-1}\{\log(k+1)-\log k\} \quad \cdots\cdots①$$

$$\begin{aligned}①\text{の左辺}&=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}\\&=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{n}\right)+\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-1\right)\\&=2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\left(1+\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}①\text{の右辺}&=2\sum_{k=1}^{n-1}\log(k+1)-2\sum_{k=1}^{n-1}\log k\\&=2\{\log 2+\log 3+\ \cdots\ +\log(n-1)+\log n\}\\&\qquad -2\{\log 1+\log 2+\ \cdots\ +\log(n-1)\}\\&=2\log n\end{aligned}$$

よって，①から

$$2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\left(1+\frac{1}{n}\right)>2\log n$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)>\log n$$ （証明終）

3　**解答**　**(1)**　箱 A に入っている赤玉の個数が k 個である状態を A_k（$k=0,\ 1,\ 2$）で表し，状態が A_i から A_j に変わる確率を $a(i,\ j)$ で表すことにする。

$$a(2,\ 2)=\frac{1}{3},\ a(2,\ 1)=\frac{2}{3}$$

$$a(1,\ 2)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$$

$$a(1,\ 1)=\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9},\ \ a(0,\ 1)=\frac{2}{3}$$

A_2

A	赤赤白
B	白白白

A_1

A	赤白白
B	赤白白

A_0

A	白白白
B	赤赤白

よって

$$p_1=a(2,\ 2)=\frac{1}{3},\ \ q_1=a(2,\ 1)=\frac{2}{3}\quad \cdots\cdots(答)$$

2回目の操作を終えたとき A_2 となるのは

$A_2 \to A_2 \to A_2$　または　$A_2 \to A_1 \to A_2$

の場合だから

$$p_2=a(2,\ 2)\cdot a(2,\ 2)+a(2,\ 1)\cdot a(1,\ 2)$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{9}=\frac{7}{27}\quad \cdots\cdots(答)$$

2回目の操作を終えたとき A_1 となるのは

$A_2 \to A_2 \to A_1$　または　$A_2 \to A_1 \to A_1$

の場合だから

$$q_2=a(2,\ 2)\cdot a(2,\ 1)+a(2,\ 1)\cdot a(1,\ 1)$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{9}=\frac{16}{27}\quad \cdots\cdots(答)$$

$p_n+q_n+r_n=1$ より

$$r_n=1-p_n-q_n\quad \cdots\cdots(答)$$

(2)　k 回目の操作を終えたときの箱の状態を B_k で表すことにする。

$B_{n+1}=A_2$ となるのは

$(B_n=A_2,\ A_2 \to A_2)$　または　$(B_n=A_1,\ A_1 \to A_2)$

の場合であるから

$$p_{n+1}=p_n\cdot a(2,\ 2)+q_n\cdot a(1,\ 2)=\frac{1}{3}p_n+\frac{2}{9}q_n\quad \cdots\cdots(答)$$

$B_{n+1}=A_1$ となるのは

$(B_n=A_2,\ A_2 \to A_1)$　または　$(B_n=A_1,\ A_1 \to A_1)$

または　$(B_n=A_0,\ A_0 \to A_1)$

の場合であるから

$$q_{n+1}=p_n\cdot a(2,\ 1)+q_n\cdot a(1,\ 1)+r_n\cdot a(0,\ 1)$$
$$=\frac{2}{3}p_n+\frac{5}{9}q_n+\frac{2}{3}r_n$$

$$=\frac{2}{3}(p_n+r_n)+\frac{5}{9}q_n=\frac{2}{3}(1-q_n)+\frac{5}{9}q_n$$

$$=-\frac{1}{9}q_n+\frac{2}{3} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(3)　(2)の漸化式から

$$q_{n+1}-\frac{3}{5}=-\frac{1}{9}\left(q_n-\frac{3}{5}\right) \quad (n\geqq 1)$$

よって，$\left\{q_n-\dfrac{3}{5}\right\}$ は，(1)より，初項 $q_1-\dfrac{3}{5}=\dfrac{1}{15}$，公比 $-\dfrac{1}{9}$ の等比数列だから

$$q_n-\frac{3}{5}=\frac{1}{15}\left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1}$$

$$q_n=\frac{3}{5}+\frac{1}{15}\left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(4)　(2)より，$p_{n+1}=\dfrac{1}{3}p_n+\dfrac{2}{9}q_n$ だから

$$3^{n+1}p_{n+1}=3^np_n+\frac{2}{9}\cdot 3^{n+1}q_n$$

(3)より

$$\frac{2}{9}\cdot 3^{n+1}q_n=2\cdot 3^{n-1}\left\{\frac{3}{5}+\frac{1}{15}\left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=\frac{6}{5}\cdot 3^{n-1}+\frac{2}{15}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

よって，$s_n=3^np_n$ より

$$s_{n+1}=s_n+\frac{6}{5}\cdot 3^{n-1}+\frac{2}{15}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$s_1=3p_1=1$$

したがって，$\{s_n\}$ の階差数列の一般項は

$$s_{n+1}-s_n=\frac{6}{5}\cdot 3^{n-1}+\frac{2}{15}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

より，$n\geqq 2$ のとき

$$s_n=s_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{6}{5}\cdot 3^{k-1}+\frac{2}{15}\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right\}$$

$$=1+\frac{6}{5}\cdot\frac{3^{n-1}-1}{3-1}+\frac{2}{15}\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1+\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\cdot 3^n-\frac{1}{10}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad \cdots\cdots ①$$

①で $n=1$ とすると，$s_1=1$ が得られるから，①は $n=1$ のときも成り立つ。

以上より，一般項は

$$s_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\cdot 3^n-\frac{1}{10}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad \cdots\cdots(答)$$

$p_n=\frac{1}{3^n}s_n$ より

$$p_n=\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n-\frac{1}{30}\left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1} \quad \cdots\cdots(答)$$