数 学

1 解答

⑴ ⅰ） $a^2-b^2+2bc-c^2$

ⅱ） x^4-5x^2+4

⑵ ⅰ） $(x+1)(x+y-2)$　ⅱ） $(x^2-x+1)(x^2+x+1)$

⑶ y の最大値：a^2+a-12　a の値：$a=-3,\ 2$

⑷ $y=2x^2-5x+3$

⑸整数 m と 0 でない整数 n を用いて分数 $\dfrac{m}{n}$ の形で表される数

⑹整数 m と 0 でない整数 n を用いて分数 $\dfrac{m}{n}$ の形で表すことができない数

⑺真偽：真

証明：実数 x，y はともに有理数なので，a，b を整数，c，d を 0 でない整数とすると，x，y は

$$x=\frac{a}{c},\quad y=\frac{b}{d}$$

と表すことができる。このとき

$$x+y=\frac{a}{c}+\frac{b}{d}=\frac{ad+bc}{cd}$$

となり，分母分子がともに整数なので，$x+y$ は有理数である。

（証明終）

⑻真偽：偽

反例：$x=1+\sqrt{2}$，$y=1-\sqrt{2}$

解 説

《小問 8 問》

⑴　ⅰ）　$(a+b-c)(a-b+c)=\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}$

$=a^2-(b-c)^2$

$=a^2-(b^2-2bc+c^2)$

$=a^2-b^2+2bc-c^2$

ii) $(x+1)(x+2)(x-1)(x-2)=(x+1)(x-1)\cdot(x+2)(x-2)$

$=(x^2-1)(x^2-4)$

$=x^4-5x^2+4$

(2) **i)** $x^2+xy-x+y-2=x^2+(y-1)x+1\cdot(y-2)$

$=(x+1)(x+y-2)$

ii) $x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2$

$=(x^2+1)^2-x^2$

$=(x^2+1-x)(x^2+1+x)$

$=(x^2-x+1)(x^2+x+1)$

(3) $y=-x^2-2ax+a-12$

$=-(x^2+2ax)+a-12$

$=-(x+a)^2+a^2+a-12$

この関数のグラフは上に凸の放物線であるから，$x=-a$ のとき，y は最大となるので，求める y の最大値は

a^2+a-12

また，y の最大値が -6 であるとき

$a^2+a-12=-6$

$a^2+a-6=0$

$(a+3)(a-2)=0$

$a=-3,\ 2$

(4) 求める2次関数を

$y=ax^2+bx+c\quad(a\neq 0)$ ……①

とおく。この関数のグラフが

点（1，0）を通るから　$a+b+c=0$ ……②

点（2，1）を通るから　$4a+2b+c=1$ ……③

点（0，3）を通るから　$c=3$ ……④

②，④より

$a+b+3=0$

$b=-a-3$ ……⑤

③に④，⑤を代入すると

$$4a+2(-a-3)+3=1$$

$$2a=4 \qquad a=2$$

⑤より　　$b=-2-3=-5$

①より　　$y=2x^2-5x+3$

(5)・(6)　有理数，無理数のそれぞれの定義を述べればよい。

また，有理数と無理数を合わせて実数といい，実数の分類は以下のようになる。

$$\text{実数}\begin{cases}\text{有理数}\cdots\begin{cases}\text{整数}\cdots\text{自然数，0，負の整数}\\\text{有限小数}\\\text{循環小数}\end{cases}\\\text{無理数}\cdots\text{循環しない小数}\end{cases}$$

(7)　x，yはともに有理数なので，x，yを分数で表し，$x+y$が有理数であることを示せばよい。

(8)　x，yはともに無理数なので，$x=1+\sqrt{2}$，$y=1-\sqrt{2}$ とおくと

$$x+y=(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=2$$

となり，これは有理数であるから，命題は偽となる。

2　解答

(1) **i）** 1001　**ii）** 420　**(2)** $\dfrac{1}{3}$　**(3)** 3600　**(4)** $\dfrac{11}{15}$

(5) **i）** $\dfrac{1}{9}$　**ii）** $\dfrac{1}{32}$　**iii）** $\dfrac{1}{36}$　**(6)** **i）** 5　**ii）** 3　**iii）** 4.9

解説

《組合せ，確率，中央値，四分位数，平均値》

(1)　3年生6人，2年生8人の中から4人の実行委員を選ぶ。

i）　選び方の総数は　　${}_{14}C_4=\dfrac{14\cdot13\cdot12\cdot11}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=1001$

ii）　3年生，2年生からそれぞれ2人ずつになるような選び方は

$${}_6C_2\times{}_8C_2=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}\times\frac{8\cdot7}{2\cdot1}=420$$

(2)　3人の手の出し方は全部で　　$3^3=27$ 通り

また，1回目で決着がつかないのは

(ア)　手の出し方が1種類のとき

（グー，グー，グー），（チョキ，チョキ，チョキ），（パー，パー，パー）の3通り。

(イ)　手の出し方が3種類のとき

3人がグー，チョキ，パーのいずれかを出せばよいので，全部で $3!=6$ 通り。

以上(ア)，(イ)より，求める確率は

$$\frac{3+6}{27}=\frac{1}{3}$$

(3)　校長先生，教頭先生，PTA会長，地域の方4人の計7人の並び方は

$7!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7=5040$ 通り

ここで，校長先生と教頭先生が隣り合う座り方を求める。まず，校長先生，教頭先生2人1組と残り5人の座り方は

$6!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6=720$ 通り

その各々について，校長先生，教頭先生の並び方は $2!=2$ 通りあるので，その座り方は

$720\times2=1440$ 通り

よって，校長先生と教頭先生が隣り合わないような座り方は

$5040-1440=3600$ 通り

(4)　食べ物系2つ，ゲーム系3つ，展示系1つの合計6つの店がA，B，C，D，E，Fの6つの場所に入る入り方は，全部で

$6!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6=720$ 通り

また，食べ物系2つを x，y とすると，x，y が同じ階になるのは

(i)　x，y がともに1階に入るとき

$(x,\ y)=(\mathrm{A},\ \mathrm{B}),\ (\mathrm{B},\ \mathrm{A})$

の2通り。その各々について，他の4つの店が他の4つの場所に入るので，全部で

$2\times4!=2\times1\cdot2\cdot3\cdot4=48$ 通り

(ii)　x，y がともに3階に入るとき

x，y がD，E，Fのいずれかに入ればよいので，その入り方は

${}_3\mathrm{P}_2=3\cdot2\cdot1=6$ 通り

(i)と同様に，全部で

$6\times4!=6\times1\cdot2\cdot3\cdot4=144$ 通り

以上(ⅰ)，(ⅱ)より，x，y が同じ階になる確率は

$$\frac{48+144}{720}=\frac{192}{720}=\frac{4}{15}$$

なので，余事象を用いて，求める確率は

$$1-\frac{4}{15}=\frac{11}{15}$$

別解　食べ物系２つの x，y が同じ階にならないのは

x＝A のとき　y＝C，D，E，F　の４通り。

x＝B のとき　y＝C，D，E，F　の４通り。

x＝C のとき　y＝A，B，D，E，F　の５通り。

x＝D のとき　y＝A，B，C　の３通り。

x＝E のとき　y＝A，B，C　の３通り。

x＝F のとき　y＝A，B，C　の３通り。

よって，全部で

$4+4+5+3+3+3=22$ 通り

その各々について，他の４つの店が，他の４つの場所に入るので，全部で

$22\times4!$ 通り

よって，求める確率は

$$\frac{22\times4!}{720}=\frac{11\times1\cdot2\cdot3\cdot4}{360}=\frac{11}{15}$$

(5)　さいころを同時に３個投げて出る目の出方は全部で 6^3 通り。

ⅰ）　連続した３つの数の目が出るのは

(1，2，3)，(2，3，4)，(3，4，5)，(4，5，6)

の４通りで，その各々について，3! 通りあるので，全部で $4\times3!$ 通り。

よって，３個のおまけをもらえる確率は

$$\frac{4\times3!}{6^3}=\frac{4\times1\cdot2\cdot3}{6\cdot6\cdot6}=\frac{1}{9}$$

ⅱ）　まず，すべて奇数の目が出るのは，出る目が１，３，５のいずれかであればよいので，全部で

$3\times3\times3=3^3$ 通り

よって，１個のおまけをもらえる確率は

$$\frac{3^3}{6^3}=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

同様に，すべて偶数の目が出るのは，出る目が２，４，６のいずれかであればよいので，２個のおまけをもらえる確率は$\frac{1}{8}$である。

ここで，２人のお客さんをa，bとすると，１人が１個のおまけをもらい，もう１人が２個のおまけをもらえるのは

㈠　aが１個，bが２個もらうとき，その確率は

$$\frac{1}{8}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{64}$$

(イ)　aが２個，bが１個もらうとき，その確率は

$$\frac{1}{8}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{64}$$

以上(ア)，(イ)は互いに排反なので，求める確率は

$$\frac{1}{64}+\frac{1}{64}=\frac{1}{32}$$

iii）　２人でちょうど５個のおまけをもらえるのは

(ウ)　aが２個，bが３個もらうとき，その確率は

$$\frac{1}{8}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{72}$$

(エ)　aが３個，bが２個もらうとき，その確率は

$$\frac{1}{9}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{72}$$

以上(ウ)，(エ)は互いに排反なので，求める確率は

$$\frac{1}{72}+\frac{1}{72}=\frac{1}{36}$$

(6)　データの値を小さい方から順に並べると

1，1，2，2，3，3，3，3，4，4，4，4，4，4，5，5，5，5，5，6，
6，6，6，7，7，7，8，8，9，10

i）　データの中央値は，小さい方から15番目の値の５と16番目の値の５の平均をとって

$$\frac{5+5}{2}=5$$

ii） データの第１四分位数は，小さい方から８番目の値の３である。

iii） データの平均値は

$$\frac{1}{30}(1+1+2+2+3+3+3+3+4+4+4+4+4+4+5+5+5+5+5+6+6+6+6+7+7+7+8+8+9+10)$$

$$=\frac{1}{30}\cdot 147=4.9$$

3 解答

(1) i）$BC=a$，$AB=\sqrt{2}$　ii）$\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$

(2) i）$y=90^\circ+\dfrac{x}{2}$　ii）$9:5$

(3) i）$AB=a+b$，$AC=a+c$，$BC=b+c$

ii）$2\sqrt{ab}$　iii）$2\sqrt{ac}$　iv）$2\sqrt{bc}$　v）$\dfrac{36}{25}$

解説

《余弦定理，内心の性質，外接する３つの円》

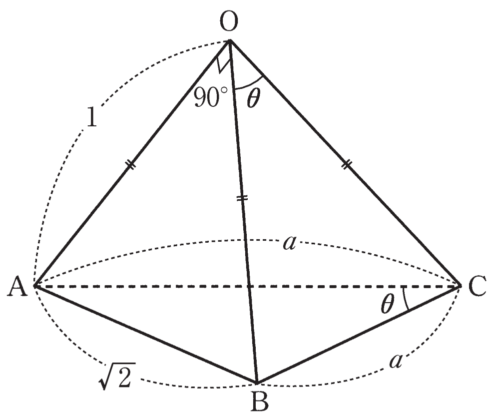
(1) 四面体 OABC について

$OA=OB=OC=1$

$\angle COA=\angle COB=\angle ACB$

$\angle AOB=90^\circ$，$AC=a$

である。



i） $\triangle OAC\equiv\triangle OBC$ より

$BC=AC=a$

また，$\triangle OAB$ は $\angle AOB=90^\circ$ の直角二等辺三角形であるから

$OA:AB=1:\sqrt{2}$

$1:AB=1:\sqrt{2}$

よって　　$AB=\sqrt{2}$

ii） $\triangle ABC$ について，余弦定理を用いると

$$\cos\theta=\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2\cdot AC\cdot BC}=\frac{a^2+a^2-(\sqrt{2})^2}{2\cdot a\cdot a}=\frac{a^2-1}{a^2}\quad\cdots\cdots①$$

また，$\triangle BOC$ について，余弦定理を用いると

$$\cos\theta=\frac{OB^2+OC^2-BC^2}{2\cdot OB\cdot OC}=\frac{1^2+1^2-a^2}{2\cdot1\cdot1}=\frac{2-a^2}{2} \qquad \cdots\cdots②$$

①，②より

$$\frac{a^2-1}{a^2}=\frac{2-a^2}{2}$$

$$2(a^2-1)=a^2(2-a^2)$$

$$2a^2-2=2a^2-a^4$$

$$a^4=2$$

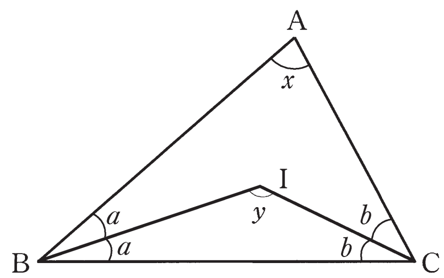
$$a^2=\sqrt{2} \quad (a^2>0)$$

これを②に代入して

$$\cos\theta=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

(2)　△ABC において点 I を内心とする。

i）　直線 BI，CI はそれぞれ∠B，∠C の二等分線であるから



$$\angle ABI=\angle CBI$$
$$=a$$
$$\angle ACI=\angle BCI$$
$$=b$$

とおくと，△ABC について

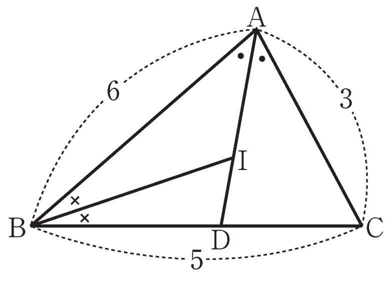
$$x+2a+2b=180^\circ$$

$$a+b=90^\circ-\frac{x}{2}$$

このとき，△BCI について

$$y=180^\circ-(a+b)=180^\circ-\left(90^\circ-\frac{x}{2}\right)=90^\circ+\frac{x}{2}$$

ii）　直線 AI と辺 BC の交点を D とすると，直線 AD は∠BAC の二等分線であるから



$$BD:DC=6:3$$

$$BD:DC=2:1$$

よって

$$BD=\frac{2}{3}BC$$

$=\dfrac{2}{3}\cdot 5=\dfrac{10}{3}$

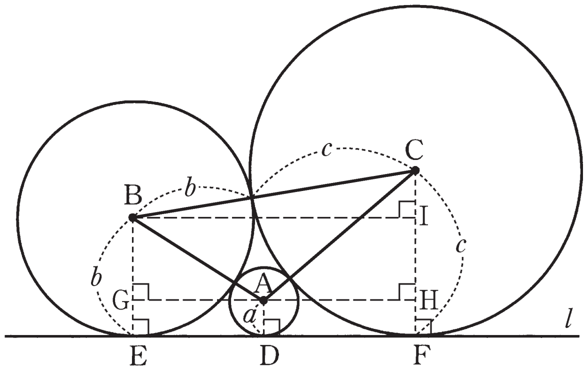
同様に，直線 BI は∠ABC の二等分線であるから

$\mathrm{AI}:\mathrm{ID}=\mathrm{AB}:\mathrm{BD}$

$=6:\dfrac{10}{3}=9:5$

(3)　３つの円は，それぞれ点D，点E，点Fにおいて直線 l に接しており，どの２つの円も外接している。

ⅰ）　円A，円B，円Cのそれぞれの半径は a，b，c　$(a<b<c)$ であり，AB，AC，BC はそれぞれ２円の中心間の距離であるから



$\mathrm{AB}=a+b$

$\mathrm{AC}=a+c$

$\mathrm{BC}=b+c$

ⅱ）　点Aから線分 BE に下ろした垂線の足をGとすると

$\mathrm{GA}=\mathrm{ED}$

であり，△BGA について，三平方の定理を用いると

$\mathrm{GA}^2=\mathrm{AB}^2-\mathrm{BG}^2$

$=(a+b)^2-(b-a)^2=a^2+2ab+b^2-(b^2-2ab+a^2)$

$=4ab$

よって　　$\mathrm{GA}=2\sqrt{ab}$

以上より　　$\mathrm{ED}=\mathrm{GA}=2\sqrt{ab}$

ⅲ）　点Aから線分 CF に下ろした垂線の足をHとすると

$\mathrm{AH}=\mathrm{DF}$

であり，△AHC について，三平方の定理を用いると

$\mathrm{AH}^2=\mathrm{AC}^2-\mathrm{CH}^2$

$=(a+c)^2-(c-a)^2=a^2+2ac+c^2-(c^2-2ac+a^2)$

$=4ac$

よって　　$\mathrm{AH}=2\sqrt{ac}$

以上より　　$\mathrm{DF}=\mathrm{AH}=2\sqrt{ac}$

ⅳ）　点Bから線分 CF に下ろした垂線の足をＩとすると

$$BI = EF$$

であり，△BIC について，三平方の定理を用いると

$$\begin{aligned} BI^2 &= BC^2 - CI^2 \\ &= (b+c)^2 - (c-b)^2 = b^2 + 2bc + c^2 - (c^2 - 2bc + b^2) \\ &= 4bc \end{aligned}$$

よって　　$BI = 2\sqrt{bc}$

以上より　　$EF = BI = 2\sqrt{bc}$　　　……①

v)　ii)，iii) より

$EF = ED + DF = 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{ac}$　……②

①，②より

$$2\sqrt{bc} = 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{ac}$$

$$\sqrt{bc} = \sqrt{ab} + \sqrt{ac}$$

これに，$b=4$，$c=9$ を代入すると

$$\sqrt{4\cdot 9} = \sqrt{a\cdot 4} + \sqrt{a\cdot 9}$$

$$6 = 2\sqrt{a} + 3\sqrt{a}$$

$$\sqrt{a} = \frac{6}{5} \qquad a = \frac{36}{25}$$