数学②

◀数学Ⅰ，Ⅱ，A，B，C▶

1 解答

(1)**アイ．** 14 **ウエ．** 18

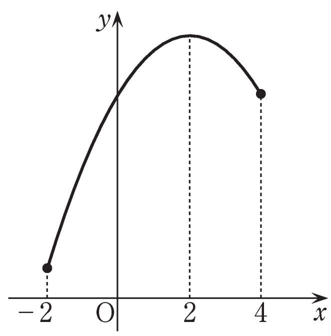
(2)**オ．** 6 **カキ．** 14 **ク．** 0 **ケ．** 1

(3)**コサ．** 63 **シ．** 1 **スセ．** 15 **ソタ．** 71 **チ．** 9 **ツテ．** 11

トナ． 69 **ニ．** 7 **ヌ．** 1

解説

《小問3問》



(1)

$$y=-x^2+4x+c$$
$$=-(x^2-4x)+c$$
$$=-(x-2)^2+4+c$$

このグラフは上に凸の放物線で，軸は直線 $x=2$ であるから，$-2\leqq x\leqq 4$ において，$x=-2$ のとき，y は最小となるので，最小値が2となる c の値は

$$-(-2)^2+4(-2)+c=2$$

$c=14$ →アイ

また，このとき

$$y=-x^2+4x+14$$

であり，$x=2$ のとき，y は最大となるので，y の最大値は

$4+c=4+14=18$ →ウエ

(2)

$$y=f(x)=-x^2+4|x-1|+c \quad (-2\leqq x\leqq 4)$$

とおくと

(i) $x-1\geqq 0$，すなわち，$1\leqq x\leqq 4$ のとき

$$f(x)=-x^2+4(x-1)+c$$

$= -x^2+4x-4+c$

$= -(x-2)^2+c$

このグラフは上に凸の放物線で，軸は直線 $x=2$ である。このとき

$f(1) = -(1-2)^2+c = -1+c$

$f(2) = c$

$f(4) = -(4-2)^2+c = -4+c$

(ii) $x-1<0$，すなわち，$-2 \leqq x<1$ のとき

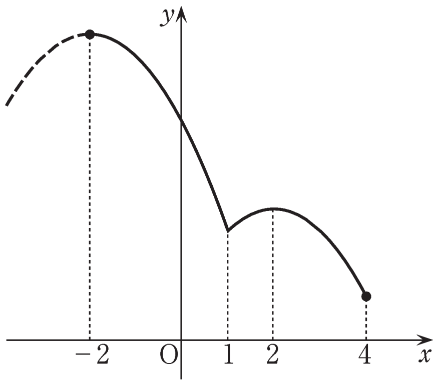
$f(x) = -x^2+4\{-(x-1)\}+c$

$= -x^2-4x+4+c$

$= -(x+2)^2+8+c$

このグラフは上に凸の放物線で，軸は直線 $x=-2$ である。このとき

$f(-2) = 8+c$



以上 (i), (ii) より，$f(4)<f(1)<f(2)<f(-2)$ であり，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。これより，$x=4$ のとき，$f(x)$ は最小となるので，最小値が 2 となる c の値は

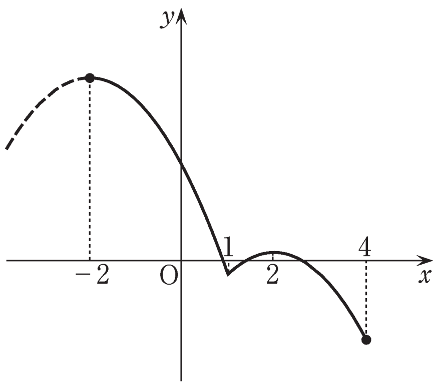
$f(4)=2 \qquad -4+c=2$

$c=6$ →オ

また，$x=-2$ のとき，$f(x)$ は最大となるので，y の最大値は

$f(-2) = 8+c = 8+6$

$= 14$ →カキ



次に，$y=f(x)$ のグラフが x 軸と 3 つの異なる共有点をもつ条件は

$f(1)<0$ かつ $f(2)>0$

であるから

$-1+c<0$，$c>0$

これを解くと　$0<c<1$ →ク，ケ

(3) あるホテルの客室は全部で 20 室あり，1 室 1 人の室数を x，1 室 2 人の室数を y とすると，$x+y \leqq 20$ であり，1 日の売上高は

$x \times 3 + y \times 4 = (3x+4y)$ 万円

となる。このとき，ある週の月曜日の宿泊客数が 31 人のときの組 (x, y)

は全部で

$$(x,\ y)=(1,\ 15),\ (3,\ 14),\ (5,\ 13),\ (7,\ 12),\ (9,\ 11)$$

の5通りである。ここで，それぞれの売上高を求めると

(i)　$(x,\ y)=(1,\ 15)$ のとき　　$3\cdot1+4\cdot15=63$ 万円

(ii)　$(x,\ y)=(3,\ 14)$ のとき　　$3\cdot3+4\cdot14=65$ 万円

(iii)　$(x,\ y)=(5,\ 13)$ のとき　　$3\cdot5+4\cdot13=67$ 万円

(iv)　$(x,\ y)=(7,\ 12)$ のとき　　$3\cdot7+4\cdot12=69$ 万円

(v)　$(x,\ y)=(9,\ 11)$ のとき　　$3\cdot9+4\cdot11=71$ 万円

であるので，(i)のとき，売上高は最小となり，(v)のとき，売上高は最大となる。よって，売上高のとる最小値は63万円であり，このとき1人で宿泊した客室数は1室，2人で宿泊した客室数は15室である。 →コ～セ

また，売上高のとる最大値は71万円であり，このとき1人で宿泊した客室数は9室，2人で宿泊した客室数は11室である。 →ソ～テ

次に，同じ週の火曜日の宿泊客数は33人であった。このとき，組 $(x,\ y)$ は全部で

$$(x,\ y)=(1,\ 16),\ (3,\ 15),\ (5,\ 14),\ (7,\ 13)$$

の4通りである。ここで，それぞれの売上高を求めると

$(x,\ y)=(1,\ 16)$ のとき　　$3\cdot1+4\cdot16=67$ 万円

$(x,\ y)=(3,\ 15)$ のとき　　$3\cdot3+4\cdot15=69$ 万円

$(x,\ y)=(5,\ 14)$ のとき　　$3\cdot5+4\cdot14=71$ 万円

$(x,\ y)=(7,\ 13)$ のとき　　$3\cdot7+4\cdot13=73$ 万円

であるから，火曜日の売上高の最小値は67万円となる。ここで，火曜日の売上高が前日の月曜日よりも減少したとするとき，月曜日の売上高のとりうる値が最小となるのは，(iv)の $(x,\ y)=(7,\ 12)$ のときであるので，求める最小値は69万円であり，1人で宿泊した客室数は7室となり，利用されなかった客室数は，$20-(7+12)=1$ 室である。 →ト～ヌ

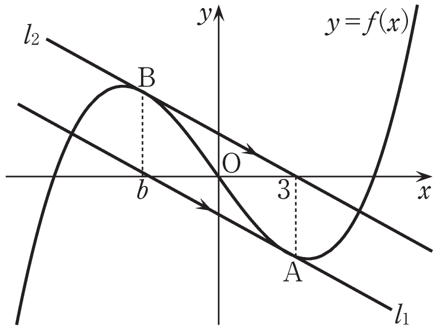
2 解答

(1)**ア.** 1　**イ.** 2　**ウ.** 8　**エオ.** -5　**カ.** 9
キク. -1　**ケコ.** 20　**サ.** 3　**シス.** 28　**セ.** 3
ソタチ. -80　**ツ.** 3

(2)**テ.** 3　**ト.** 2　**ナ.** 1　**ニ.** 3　**ヌネ.** -2　**ノ.** 3　**ハ.** 1
ヒ. 3　**フ.** 2　**ヘ.** 9　**ホ.** 0

解説

《導関数，接線の方程式，極値，解と係数の関係》



(1) $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-8x$ の導関数 $f'(x)$ を求めると

$$f'(x)=x^2-2x-8 \quad \to ア〜ウ$$

となる。曲線 C 上の点 A$(3,\ f(3))$ における接線 l_1 の方程式は

$$y-f(3)=f'(3)(x-3)$$

$$y-\left(\frac{1}{3}\cdot 3^3-3^2-8\cdot 3\right)=(3^2-2\cdot 3-8)(x-3)$$

$$y+24=-5(x-3)$$

$$y=-5x-9 \quad \to エ〜カ$$

この接線 l_1 と平行となる C 上の点Bの接線 l_2 について，点Bの x 座標を b とすると

$f'(b)=-5$ より

$$b^2-2b-8=-5$$

$$b^2-2b-3=0$$

$$(b+1)(b-3)=0$$

$b\neq 3$ より

$$b=-1 \quad \to キク$$

このとき

$$y=f(-1)=\frac{1}{3}(-1)^3-(-1)^2-8(-1)=\frac{20}{3} \quad \to ケ〜サ$$

次に，$y=f(x)$ と 2 点で交わる曲線 C'：$y=g(x)$ について，$g(x)=a$ より，$y=f(x)$ と x 軸に平行な直線 $y=a$ が 2 点で交わるような a の値を求めればよい。ここで

$$f'(x)=x^2-2x-8=(x+2)(x-4)$$

$f'(x)=0$ のとき　　$x=-2,\ 4$

なので，$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって，$x=-2$ のとき

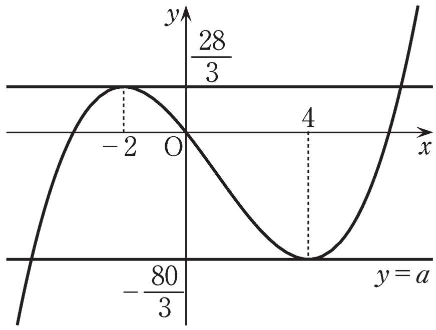
極大値 $f(-2)=-\frac{8}{3}-4+16$

$=\frac{28}{3}$

$x=4$ のとき

極小値 $f(4)=\frac{64}{3}-16-32$

$=-\frac{80}{3}$



以上より，求める a の値は

$a=\frac{28}{3}, \frac{-80}{3}$　→シ～ツ

(2)　$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

より

$f'(x)=3x^2+2ax+b$　→テ～ナ

となる。$f(x)$ が2つの極値を持つためには，$f'(x)=0$ の判別式を D とすると，$D>0$ であればよいので

$\frac{D}{4}=a^2-3b>0$

$a^2>3b$　→ニ

このとき，極大値での x の値を α，極小値での x の値を β とおくと，α，β は $f'(x)=3x^2+2ax+b=0$ の解であるので，解と係数の関係より

$\alpha+\beta=-\frac{2a}{3}=\frac{-2}{3}a$　→ヌ～ノ

$\alpha\beta=\frac{b}{3}=\frac{1}{3}b$　→ハ，ヒ

また，このとき，$f(\alpha)+f(\beta)=2c$ より

$(\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c)+(\beta^3+a\beta^2+b\beta+c)=2c$

$\alpha^3+\beta^3+a(\alpha^2+\beta^2)+b(\alpha+\beta)=0$

$(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+a\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}+b(\alpha+\beta)=0$

$\left(-\frac{2}{3}a\right)^3-3\cdot\frac{b}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}a\right)+a\left\{\left(-\frac{2}{3}a\right)^2-2\cdot\frac{b}{3}\right\}+b\left(-\frac{2}{3}a\right)=0$

$-\frac{8}{27}a^3+\frac{2}{3}ab+\frac{4}{9}a^3-\frac{2}{3}ab-\frac{2}{3}ab=0$

$\frac{4}{27}a^3-\frac{2}{3}ab=0$

$\frac{2}{9}a^3-ab=0$　→フ，ヘ

$a\left(\frac{2}{9}a^2-b\right)=0$

$a=0$　または　$b=\frac{2}{9}a^2$

これは，$a^2>3b$，すなわち，$b<\frac{1}{3}a^2$ を満たす。

よって，$f(\alpha)+f(\beta)=2c$ となるための a，b の満たすべき条件は

$b=\frac{2}{9}a^2$　または　$a=0$　→ホ

3 解答

(1)ア． C　**イ．** F　**ウ．** D　**エ．** 1　**オ．** F
カ． 2　**キ．** C　**ク．** D　**ケ．** 2　**コ．** D　**サ．** F
シ－①　**ス**－②　**セ．** C　**ソ．** D　**タ．** F　**チ．** D　**ツ．** F
(2)テ－②　**ト**－⑧　**ナ**－②　**ニ．** 1　**ヌ．** F
(3)ネ－②　**ノ．** 1　**(4)ハヒフ．** 174

解説

《複利計算，漸化式と一般項，Σ計算》

(1)　銀行から C 万円を借りるとする。利子率は F（$0<F<1$）で，利子の発生後，毎年 D 万円を返済する。n 年後の借入残高を A_n とするとき，1年後の借入残高 A_1 は

$A_1=C(1+F)-D$　→ア～ウ

である。2年後の借入残高 A_2 は

$A_2=(1+F)A_1-D$　→エ，オ

$=(1+F)\{C(1+F)-D\}-D=C(1+F)^2-(1+F)D-D$

$=(1+F)^2C-D(2+F)$　→カ～ケ

であり，n 年後の借入残高 A_n は

$A_n=(1+F)A_{n-1}-D$　……③

ここで　$\alpha=(1+F)\alpha-D$　……④

とおく。④を α について解くと

$$\alpha=(1+F)\alpha-D$$

$$\alpha=\alpha+F\alpha-D$$

$$F\alpha=D \qquad \alpha=\frac{D}{F}$$ →コ，サ

また，③－④より

$$A_n-\alpha=(1+F)(A_{n-1}-\alpha)$$

$$A_n-\frac{D}{F}=(1+F)\left(A_{n-1}-\frac{D}{F}\right)$$

ここで，$B_n=A_n-\dfrac{D}{F}$とおくと

$$\begin{aligned}B_n&=(1+F)B_{n-1}\\&=(1+F)\{(1+F)B_{n-2}\}\\&=(1+F)^2B_{n-2}\end{aligned}$$

これを繰り返すと

$$B_n=(1+F)^{n-1}B_1$$ →シ

$$\begin{aligned}&=(1+F)^{n-1}\left(A_1-\frac{D}{F}\right)=(1+F)^{n-1}\left\{C(1+F)-D-\frac{D}{F}\right\}\\&=(1+F)^{n-1}\left\{C(1+F)-\frac{D}{F}(1+F)\right\}\\&=(1+F)^n\left(C-\frac{D}{F}\right)\end{aligned}$$ →ス～タ

$B_n=A_n-\dfrac{D}{F}$より

$$A_n-\frac{D}{F}=(1+F)^n\left(C-\frac{D}{F}\right)$$

$$A_n=(1+F)^n\left(C-\frac{D}{F}\right)+\frac{D}{F} \quad \cdots\cdots①$$

ここで，$1+F>1$より，借入残高を減らすためには，$C-\dfrac{D}{F}<0$であることが必要であるので，両辺にF（>0）をかけて

$$FC-D<0$$

$$D>CF$$ →チ，ツ

(2)　1年後の返済額の割引現在価値V_1は，Dを$1+F$で割った値なので

$$V_1=\frac{D}{1+F}$$

であり，n 年後の返済額の割引現在価値 V_n は，D を $(1+F)^n$ で割った値なので

$$V_n=\frac{D}{(1+F)^n} \quad \to テ$$

である。1年後から n 年後までの返済額の割引現在価値の和 $\sum_{i=1}^{n}V_i$ は

$$\sum_{i=1}^{n}V_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{D}{(1+F)^i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+F)^i}D \quad \to ト$$

$$=D\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1+F}\right)^i$$

ここで，$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1+F}\right)^i$ は初項 $\frac{1}{1+F}$，公比 $\frac{1}{1+F}$，項数 n の等比数列の和であるから

$$\sum_{i=1}^{n}V_i=D\cdot\frac{\frac{1}{1+F}\left\{1-\left(\frac{1}{1+F}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{1+F}}$$

$$=D\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{1+F}\right)^n}{(1+F)-1}$$

$$=D\cdot\frac{1-\frac{1}{(1+F)^n}}{F}$$

$$=\frac{(1+F)^n-1}{(1+F)^nF}D \quad \cdots\cdots② \quad \to ナ〜ヌ$$

(3)　n 年後に完済する返済額を求めるには，2通りの方法があって，(1)の①を使うと

$$A_n=(1+F)^n\left(C-\frac{D}{F}\right)+\frac{D}{F}$$

$$=(1+F)^nC-(1+F)^n\cdot\frac{D}{F}+\frac{D}{F}$$

$$=(1+F)^nC-\frac{(1+F)^n-1}{F}D$$

ここで，$A_n=0$ とすると

$$(1+F)^nC-\frac{(1+F)^n-1}{F}D=0 \quad \cdots\cdots⑤ \quad \to ネ，ノ$$

これを満たすDの小数点以下の端数を切り上げた額が求める返済額である。

⑤をDについて解くと

$$\frac{(1+F)^n-1}{F}D=(1+F)^nC$$

$$D=\frac{(1+F)^nF}{(1+F)^n-1}C$$

また，(2)の②について，$\sum_{i=1}^{n}V_i=C$とすると

$$C=\frac{(1+F)^n-1}{(1+F)^nF}D$$

$$D=\frac{(1+F)^nF}{(1+F)^n-1}C$$

以上より，①，②のどちらを使っても

$$D=\frac{(1+F)^nF}{(1+F)^n-1}C$$

の小数点以下の端数を切り上げた額が毎回の返済額である。

(4)　($n=$) 40 年返済，利子率 ($F=$) 3％で ($C=$) 4000 万円を借りたとすると，(3)より

$$D=\frac{(1+F)^nF}{(1+F)^n-1}C=\frac{(1+0.03)^{40}\times 0.03}{(1+0.03)^{40}-1}C$$

$$=\frac{(1.03)^{40}\times 0.03}{(1.03)^{40}-1}C=\frac{3.26\times 0.03}{3.26-1}C$$

$$=\frac{0.0978}{2.26}\times 40000000\fallingdotseq 1730973\text{円}$$

1 万円未満を切り上げると　　$D=1740000$ 円

以上より，返済額Dを万円単位で求めると，174 万円となる。

→ハ～フ