数 学

1 解答

(1) i) $4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-3$ ii) $\left(-\frac{1}{2},\ -3\right)$ iii) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$

iv) $y=4x^2+16x+3$, $y=4x^2-4x+3$

(2) 0.625 (3) $100_{(5)}$ (4) $a=4$, $b=5$ (5) $2^2\times7\times11$ (6) 120 個

解説

《小問 6 問》

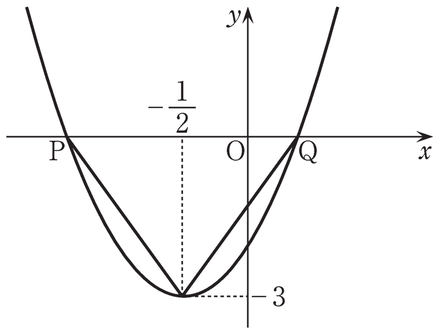
(1) $y=4x^2+4x-2$ ……①

i) ①を変形すると

$$y=4x^2+4x-2=4(x^2+x)-2=4\left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}-2=4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-3$$

ii) i)より，求める頂点の座標は $\left(-\frac{1}{2},\ -3\right)$

iii) 2 次関数①と x 軸との交点を P，Q とし，その x 座標を p，q （$p<q$）とすると，①より，$y=0$ として



$$4x^2+4x-2=0$$

$$2x^2+2x-1=0$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-2(-1)}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$$

よって $p=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$，$q=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

であるから，求める三角形の面積は

$$\frac{1}{2}(q-p)\times3=\frac{1}{2}\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}-\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)\cdot3=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

iv) 2 次関数①の頂点を x 軸方向に a，y 軸方向に b だけ平行移動すると，

ⅱ）より，その座標は

$$\left(-\frac{1}{2}+a,\ \ -3+b\right)$$

これが，$y=6x-1$ 上にあることから

$$-3+b=6\left(-\frac{1}{2}+a\right)-1$$

$$b=6a-1 \quad \cdots\cdots ②$$

また，このとき，①の x に $x-a$，y に $y-b$ を代入すると

$$y-b=4(x-a)^2+4(x-a)-2$$

$$y-(6a-1)=4(x^2-2ax+a^2)+4(x-a)-2 \quad (②より)$$

$$y=4x^2+(4-8a)x+4a^2+2a-3 \quad \cdots\cdots ③$$

これが，点（0，3）を通るので

$$3=4\cdot 0^2+(4-8a)\cdot 0+4a^2+2a-3$$

$$4a^2+2a-6=0$$

$$2a^2+a-3=0$$

$$(a-1)(2a+3)=0$$

$$a=-\frac{3}{2},\ 1$$

これより，$a=-\frac{3}{2}$ のとき，③は

$$y=4x^2+\left\{4-8\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}x+4\left(-\frac{3}{2}\right)^2+2\left(-\frac{3}{2}\right)-3=4x^2+16x+3$$

$a=1$ のとき，③は

$$y=4x^2+(4-8\cdot 1)x+4\cdot 1^2+2\cdot 1-3=4x^2-4x+3$$

以上より，求める2次関数は

$$y=4x^2+16x+3,\ \ y=4x^2-4x+3$$

別解　頂点が直線 $y=6x-1$ 上にあるので，実数 t を用いて頂点の座標を（t，$6t-1$）とする。

このとき，2次関数①を平行移動させたグラフの方程式は

$$y=4(x-t)^2+6t-1 \quad \cdots\cdots ②$$

②が点（0，3）を通ることから

$$3=4(0-t)^2+6t-1$$

整理して

$2t^2+3t-2=0$

$(t+2)(2t-1)=0$

$t=-2,\ \dfrac{1}{2}$

$t=-2$ のとき，②は

$y=4(x+2)^2-13=4x^2+16x+3$

$t=\dfrac{1}{2}$ のとき，②は

$y=4\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+2=4x^2-4x+3$

以上より，求める 2 次関数は

$y=4x^2+16x+3,\ y=4x^2-4x+3$

(2) $0.101_{(2)}=1\cdot2^{-1}+0\cdot2^{-2}+1\cdot2^{-3}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{5}{8}=0.625$

(3) $101000_{(2)}\times0.101_{(2)}=(1\cdot2^5+0\cdot2^4+1\cdot2^3+0\cdot2^2+0\cdot2^1+0\cdot2^0)\times\dfrac{5}{8}$

$=40\times\dfrac{5}{8}=25$

$=1\cdot5^2+0\cdot5^1+0\cdot5^0=100_{(5)}$

(4) 3 桁の自然数 aab を 9 進法で表すと $baa_{(9)}$ となるので

$aab=baa_{(9)}$

$a\cdot10^2+a\cdot10+b=b\cdot9^2+a\cdot9+a$

$100a+10a+b=81b+9a+a$

$100a=80b \qquad 5a=4b \quad \cdots\cdots①$

ここで，整数 a，b の範囲は，$1\leqq a\leqq8$，$1\leqq b\leqq8$ であるから，①より，求める a と b の値は

$a=4,\ b=5$

(5) $308=2^2\times7\times11$

(6) 308 と互いに素な自然数は，(5)より，2 の倍数でもなく，7 の倍数でもなく，11 の倍数でもない自然数である。ここで，308 以下の自然数で，2 の倍数，7 の倍数，11 の倍数の集合をそれぞれ，A，B，C とすると

$n(A)=308\div2=154,\ n(B)=308\div7=44,$

$n(C)=308\div11=28,\ n(A\cap B)=308\div14=22,$

$n(B \cap C) = 308 \div 77 = 4$, $n(C \cap A) = 308 \div 22 = 14$,

$n(A \cap B \cap C) = 308 \div 154 = 2$

であるから，308 以下の自然数で，２の倍数または７の倍数または 11 の倍数であるものの個数 $n(A \cup B \cup C)$ は

$$
\begin{aligned}
&n(A \cup B \cup C) \\
&= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) \\
&\qquad + n(A \cap B \cap C) \\
&= 154 + 44 + 28 - 22 - 4 - 14 + 2 = 188
\end{aligned}
$$

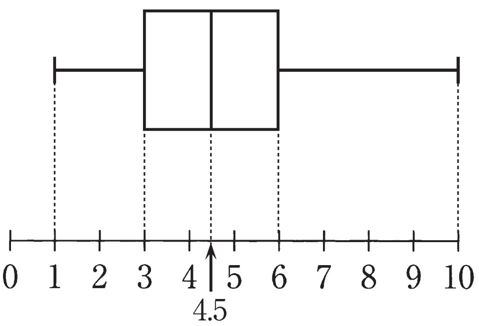
よって，求める個数は

$$308 - n(A \cup B \cup C) = 308 - 188 = 120 \text{ 個}$$

２ 解答

(1) 4.95 点

(2)



(3) 0.2525 だけ増加する。

(4) i) $\dfrac{20-n}{20}$　ii) ① $\dfrac{99-n}{18}$　② 10 人

(5) ①最小値 1 点　最大値 10 点　②最小値 8.1 点　最大値 8.5 点

③最小値 3 人　最大値 4 人

解説

《平均値，箱ひげ図，データの修正と調整》

(1)　生徒 20 人が受験した全 10 問の試験の結果は，下の表のようになる。

得点	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	合計
人数	0	2	0	5	3	2	4	1	0	1	2	20(人)

これより，得点の平均値 $\overline{x}$ は

$$\overline{x} = \frac{1}{20}(0 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 9 \cdot 1 + 10 \cdot 2)$$

$$=\frac{99}{20}=4.95\text{ 点}$$

(2)　20 人の得点を小さい順に並べると

1, 1, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 9, 10, 10

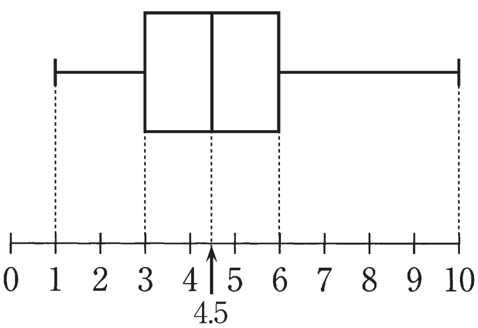
これより，データの最小値は 1，最大値は 10 であり

$$(\text{中央値})=\frac{4+5}{2}=4.5$$

$$(\text{第 1 四分位数})=\frac{3+3}{2}=3$$

$$(\text{第 3 四分位数})=\frac{6+6}{2}=6$$

であるから，データの箱ひげ図は〔解答〕の図のようになる。



(3)　修正前と修正後のデータの平均，分散をそれぞれ $\overline{x}$，$\overline{y}$，$s_x{}^2$，$s_y{}^2$ とする。

$$\overline{x}=\frac{99}{20},\ \overline{y}=\frac{100}{20},\ \overline{y^2}-\overline{x^2}=\frac{1}{20}(8^2-7^2)=\frac{15}{20}$$

$$s_y{}^2-s_x{}^2=\{\overline{y^2}-(\overline{y})^2\}-\{\overline{x^2}-(\overline{x})^2\}=(\overline{y^2}-\overline{x^2})-\{(\overline{y})^2-(\overline{x})^2\}$$

$$=\frac{15}{20}-\left\{\left(\frac{100}{20}\right)^2-\left(\frac{99}{20}\right)^2\right\}=\frac{15}{20}-\frac{(100+99)(100-99)}{400}$$

$$=\frac{300-199}{400}=\frac{101}{400}=0.2525$$

以上より，修正後の得点の分散は，修正前の得点の分散より 0.2525 だけ増加する。

(4)　i)　n 人以外の $(20-n)$ 人の各々に 1 点ずつ入るので，得点調整後の平均値 $\overline{x_a}$ と調整前の平均値 $\overline{x_b}$ の関係は

$$\overline{x_a}=\overline{x_b}+\frac{1}{20}(20-n)\cdot 1$$

であるから，これより

$$\overline{x_a}-\overline{x_b}=\frac{20-n}{20}$$

ii） ①　得点調整前の 20 人の合計得点は(1)より，99 点であるから，得点調整後の 20 人の合計得点は（$99-n$）点となるので，得点調整後の平均値 $\overline{x_c}$ は

$$\overline{x_c}=\frac{1}{20}(99-n)\times\frac{10}{9}=\frac{99-n}{18}$$

②　調整後の平均値 $\overline{x_c}$ が調整前の平均値 $\overline{x_b}$ より下がるとき

$$\overline{x_c}<\overline{x_b} \qquad \frac{99-n}{18}<\frac{99}{20} \qquad 10(99-n)<9\cdot 99$$

$$10\cdot 99-10n<9\cdot 99 \qquad 10n>99$$

$$n>9.9$$

n は整数なので，求める n の最小値は 10 である。

(5)　追加した生徒 10 人の得点の合計を N とする。このとき

$$\overline{x_t}=\frac{1}{30}(99+N)$$

$\overline{x_t}\geqq 6$ より　$\frac{1}{30}(99+N)\geqq 6$

$$99+N\geqq 180 \qquad N\geqq 81 \quad \cdots\cdots Ⓐ$$

Q_2 は 15 番目と 16 番目の得点の平均である。

最初の 20 人の時点で 5 点以下が 12 人いるので，$Q_2<6$ のとき，10 人のうち少なくとも 3 人は 5 点以下である。

10 人のうち 4 人が 5 点以下と仮定すると $N\leqq 5\times 4+10\times 6=80$ となり，Ⓐに反するので 10 人のうち「3 人が 5 点以下，7 人が 6 点以上」……Ⓑである。

10 人の得点をⒶかつⒷを満たし，N が最大となるように決めると

5，5，5，10，10，10，10，10，10，10

となる。よって　①の最大値 10，②の最大値 $\frac{85}{10}=8.5$

10 人の得点を $N=81$ かつⒷを満たし，一番得点の低い生徒の得点が最小となるように決めると

1，5，5，10，10，10，10，10，10，10

となる。よって　　①の最小値１，②の最小値$\dfrac{81}{10}=8.1$

　10人の得点をⒶかつⒷを満たし，得点が６点以下の生徒の人数が最大となるように決めると

　　　5，5，5，6，10，10，10，10，10，10

となる。よって　　③の最大値４，③の最小値３　（Ⓑより）

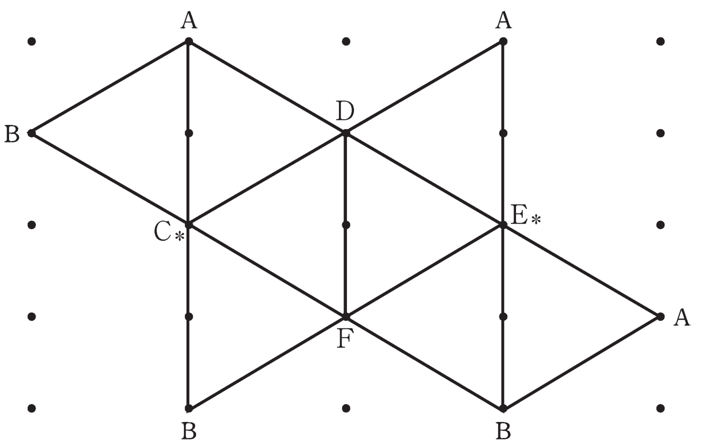
3 解答

(1)正八面体　**(2)**$\sqrt{3}$ 倍　**(3)**$\dfrac{3}{2}$倍

(4) $AB=\sqrt{2}$　$EC=2$　$V=\dfrac{4}{3}$

(5) $V_1=\dfrac{8}{3}\sqrt{2}$　$r_1=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　$V_2=16\sqrt{2}$　$r_2=\sqrt{2}$

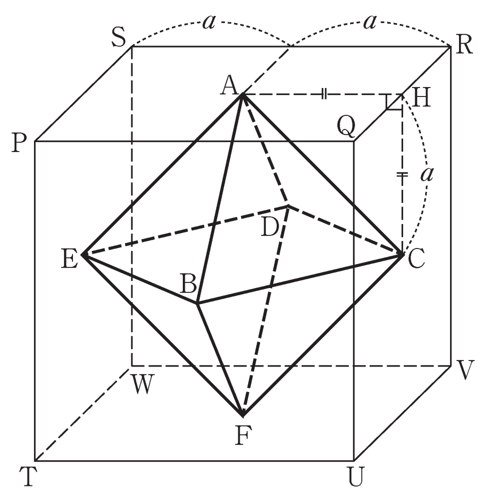
(6)



＊C，Eは逆になっていても可

解説

《立体の展開図と最短距離，体積，内接球の半径》



(1)　立方体の各面の対角線の交点を頂点とし，隣り合う面の頂点どうしを結ぶと

$$AB=AC=AD=AE=BC$$
$$=CD=DE=EB=FB=FC$$
$$=FD=FE$$

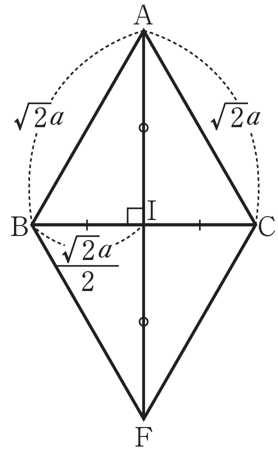
より，立体ABCDEFは正八面体である。

(2)　立方体の１辺の長さを$2a$　$(a>0)$とし，点Cから線分QRに下ろした垂線

の足をHとすると

$$\mathrm{CH}=\frac{1}{2}\mathrm{RV}=\frac{1}{2}\cdot 2a=a$$

である。△AHCは，AH＝HCの直角二等辺三角形であるから，$\mathrm{AC}=\sqrt{2}a$となる。このとき，右の展開図より，AFとBCの交点をＩとすると，三平方の定理より



$$\mathrm{AI}=\sqrt{(\mathrm{AB})^2-(\mathrm{BI})^2}=\sqrt{(\sqrt{2}a)^2-\left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{2a^2-\frac{1}{2}a^2}=\sqrt{\frac{3}{2}}a=\frac{\sqrt{6}}{2}a$$

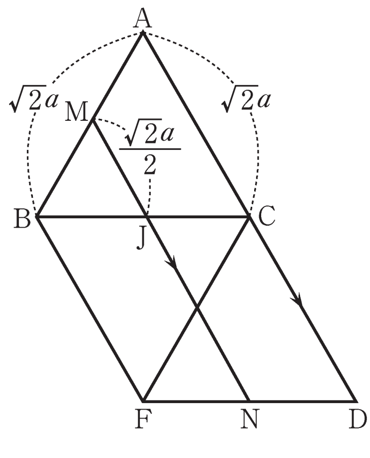
よって，点Ａから点Ｆに至る最短距離AFの長さは

$$\mathrm{AF}=2\mathrm{AI}=2\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}a=\sqrt{6}a$$

このとき，$\mathrm{AB}=\sqrt{2}a$より，最短距離AFはABの長さの$\sqrt{3}$倍である。

(3)　AB，DFの中点をM，Ｎとする。

また，右の展開図ABFDは等脚台形であり，MNとBCの交点をＪとすると，中点連結定理より



$$\mathrm{MJ}=\frac{1}{2}\mathrm{AC}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

よって，点Mから点Ｎに至る最短距離MNの長さは

$$\mathrm{MN}=3\mathrm{MJ}=\frac{3\sqrt{2}}{2}a$$

このとき，$\mathrm{AB}=\sqrt{2}a$より，最短距離MNはABの長さの$\frac{3}{2}$倍である。

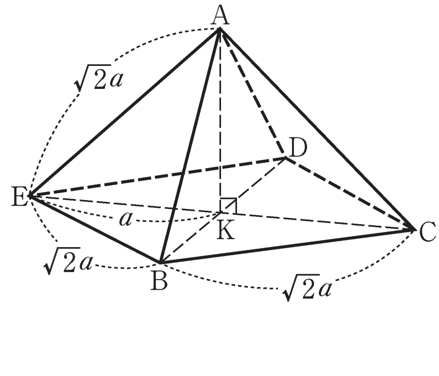
(4)　立方体の１辺の長さが２のとき

$2a=2\qquad a=1$

であるから，求めるAB，ECの長さは

$\mathrm{AB}=\sqrt{2}a=\sqrt{2}\cdot 1=\sqrt{2}$

$\mathrm{EC}=\mathrm{SR}=2a=2\cdot 1=2$



また，点Ａから平面BCDEに下ろした

垂線の足をKとすると，直角三角形 AKE について

$$\mathrm{AE}:\mathrm{EK}=\sqrt{2}a:a=\sqrt{2}:1$$

なので

$$\mathrm{AK}=\mathrm{EK}=a$$

となる。ここで，正四角錐 A-BCDE の体積を V' とすると

$$V'=\frac{1}{3}\times(\text{正方形BCDEの面積})\times\mathrm{AK}$$

$$=\frac{1}{3}\times(\sqrt{2}a)^2\cdot a=\frac{2}{3}a^3$$

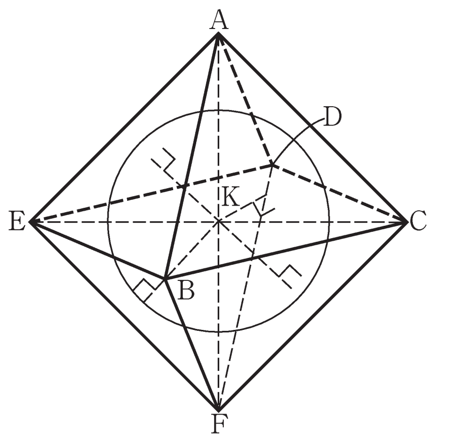
よって，正八面体の体積 V は

$$V=2V'=2\cdot\frac{2}{3}a^3=\frac{4}{3}a^3$$

$$=\frac{4}{3}\cdot1^3=\frac{4}{3}$$

(5)　AB＝2 より

$$\sqrt{2}a=2\qquad a=\sqrt{2}$$



このとき，正八面体の体積 V_1 は

$$V_1=\frac{4}{3}a^3=\frac{4}{3}(\sqrt{2})^3$$

$$=\frac{8}{3}\sqrt{2}$$

また，正八面体に内接する球の中心は，(4)の点Kと一致し，点Kから正八面体の各面に下ろした垂線の長さは等しく，正八面体をKを頂点とする８つの合同な四面体に分けることができるので

$$V_1=8\times(\text{四面体 K-ABE の体積})$$

$$\frac{8}{3}\sqrt{2}=8\times\left\{\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\cdot2\cdot2\cdot\sin60^\circ\right)\times r_1\right\}$$

$$\frac{8}{3}\sqrt{2}=8\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot2\cdot2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}r_1$$

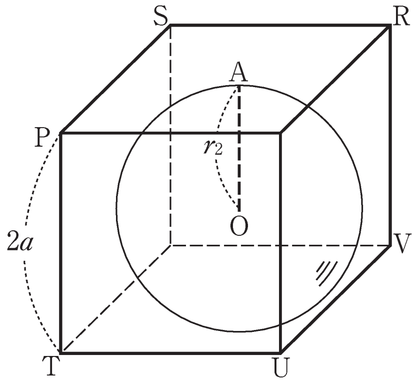
$$r_1=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

また，立方体の体積 V_2 は

$$V_2 = (2a)^3 = (2\sqrt{2})^3 = 16\sqrt{2}$$

次に，立方体の内接球Oの半径 r_2 は

$$r_2 = \mathrm{OA} = \frac{1}{2}\mathrm{PT} = \frac{1}{2}\cdot 2a = a = \sqrt{2}$$



(6)　与えられた６点A，A，A，B，B，Bの位置を考慮して，８枚の正三角形が並ぶように展開すればよい。