数学②

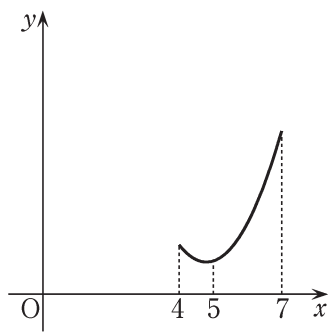
◀経済・観光まちづくり学部▶

1 解答 **(1)ア．** 7 **イウ．** 26
(2)エオ． −2 **カ．** 1 **キク．** 14 **ケコ．** −3
(3) i)サ―① **シ**―④ **ス**―⑤ **セ**―⓪ **ii)ソ**―⓪ **タ**―①
(4)チツ． 16 **テ．** 7 **ト．** 2 **(5)ナ．** 2 **ニヌ．** 11 **(6)ネノハヒ．** 1069

解説

《小問６問》

(1) $y=x^2-10x+a=(x-5)^2-25+a$



これより，$4\leqq x\leqq 7$ のとき，y が最大値をとるのは，軸の方程式が $x=5$ より

$x=7$ →ア

のときである。また，このとき，最大値が５となる a の値は

$7^2-10\cdot 7+a=5$

$a=26$ →イウ

(2) $2x^2+(m-2)x+m+4=0$ ……①

２次方程式①が重解をもつ条件は，２次方程式①の判別式を D とすると，$D=0$ であるから

$D=(m-2)^2-4\cdot 2(m+4)=0$

$m^2-4m+4-8m-32=0$

$m^2-12m-28=0$

$(m+2)(m-14)=0$

$m=-2,\ 14$

$m=-2$ のとき，①は $2x^2-4x+2=0$

$2(x-1)^2=0 \qquad x=1$

$m=14$ のとき，①は $2x^2+12x+18=0$

$2(x+3)^2=0 \qquad x=-3$

以上より

$m=-2$ のとき　　重解は $x=1$　→エオ，カ

$m=14$ のとき　　重解は $x=-3$　→キク，ケコ

(3)　**i）**　$f(x)=x^2-4x+4=(x-2)^2$

より

$f(x)<0$　すなわち　$(x-2)^2<0$ の解は，ない（①）　→サ

$f(x)\leqq 0$　すなわち　$(x-2)^2\leqq 0$ の解は

$x=2$（④）　→シ

$f(x)>0$　すなわち　$(x-2)^2>0$ の解は，2 以外のすべての実数（⑤）

→ス

$f(x)\geqq 0$　すなわち　$(x-2)^2\geqq 0$ の解は，すべての実数（⓪）　→セ

ii）　$g(x)=-x^2-4x-5=-(x+2)^2-1$

より，$g(x)<0$ のとき

$-(x+2)^2-1<0 \qquad (x+2)^2+1>0$

よって，$g(x)<0$ の解は，すべての実数（⓪）　→ソ

また，$g(x)>0$ のとき

$-(x+2)^2-1>0 \qquad (x+2)^2+1<0$

よって，$g(x)>0$ の解は，ない（①）　→タ

(4)　$1-\dfrac{n-1}{3}>\dfrac{n}{4}$

両辺に 12 をかけて　　$12-4(n-1)>3n$

$12-4n+4>3n \qquad -7n>-16$

$n<\dfrac{16}{7}$　→チツ，テ

また，$n<\dfrac{16}{7}=2.2\cdots$ であるから，この不等式を満たす最大の自然数 n の値は

$n=2$　→ト

(5)　p，q が素数のとき，pq の正の約数の総和は，$(1+p)(1+q)$ であり，

これが 36 であるから

$$(1+p)(1+q)=36 \quad \cdots\cdots ①$$

ここで，$p<q$ より，$1+p<1+q$ であるから，①より

$$(1+p,\ 1+q)=(1,\ 36),\ (2,\ 18),\ (3,\ 12),\ (4,\ 9)$$

この組の中で，p，q が素数となる組は

$$(p,\ q)=(2,\ 11) \quad \rightarrow ナ，ニヌ$$

(6) 14 で割ると 5 余り，9 で割ると 7 余る自然数を n とし，x，y を整数とすると

$$n=14x+5=9y+7 \quad \cdots\cdots ①$$

と表せる。このとき，①は $14x+5=9y+7$

$$14x-9y=2 \quad \cdots\cdots ②$$

ここで，$x=4$，$y=6$ のとき

$$14\cdot 4-9\cdot 6=2 \quad \cdots\cdots ③$$

であるから，②−③ より

$$14(x-4)-9(y-6)=0$$

$$14(x-4)=9(y-6)$$

14 と 9 は互いに素であるから，k を整数とすると

$$y-6=14k \qquad y=14k+6$$

と表すことができる。①より

$$n=9y+7=9(14k+6)+7=126k+61$$

$k=8$ のとき，$n=126\cdot 8+61=1069$

である。$k\leqq 7$ のとき，$n<1000$ であるから，4 桁で最小のものは，$k=8$ のときのみとなる。

すなわち　$n=1069$　→ネノハヒ

2 解答

アイ. 19　**ウエ.** 55　**オカ.** -3　**キク.** 38
ケコ. 55　**サ.** 5　**シ.** 3　**スセ.** 11　**ソタ.** -6
チツ. 38　**テトナ.** 288　**ニヌ.** 75　**ネ.** 1　**ノ.** 5　**ハヒ.** 15

解説

《極値と第 2 次導関数》

$$R(Q)=20Q-4Q^2$$

$$C(Q)=Q^3-23Q^2+75Q+75$$

より

$$\pi(Q)=R(Q)-C(Q)=20Q-4Q^2-(Q^3-23Q^2+75Q+75)$$
$$=-Q^3+19Q^2-55Q-75 \quad \to \text{アイ，ウエ}$$

これより

$$\pi'(Q)=-3Q^2+38Q-55$$

であるから，$\pi'(Q)=0$ のとき

$$-3Q^2+38Q-55=0 \quad \to \text{オカ，キク，ケコ}$$

$$3Q^2-38Q+55=0 \qquad (3Q-5)(Q-11)=0$$

$$Q=\frac{5}{3},\ 11 \quad \to \text{サ，シ，スセ}$$

また

$$\pi''(Q)=\{\pi'(Q)\}'=(-3Q^2+38Q-55)'=-6Q+38 \quad \to \text{ソタ，チツ}$$

ここで，$Q=\dfrac{5}{3}$ のとき

$$\pi''(Q)=\pi''\left(\frac{5}{3}\right)=-6\cdot\frac{5}{3}+38=28>0$$

なので，この場合は二階の条件を満たさない。

$Q=11$ のとき

$$\pi''(Q)=\pi''(11)=-6\cdot 11+38=-28\leqq 0$$

なので，この場合は二階の条件を満たす。

以上より，$Q=11$ のとき，$\pi(Q)$ は極大となるので，このときの利潤は

$$\pi(Q)=\pi(11)=-11^3+19\cdot 11^2-55\cdot 11-75$$
$$=-1331+2299-605-75=288 \quad \to \text{テトナ}$$

また，$Q=0$ のとき

$$\pi(Q)=\pi(0)=-0+0-0-75=-75 \quad \to \text{ニヌ}$$

次に，$\pi(Q)=-Q^3+19Q^2-55Q-75$ を因数分解すると

$$\pi(Q)=-(Q^3-19Q^2+55Q+75)$$
$$=-(Q+1)(Q^2-20Q+75)$$
$$=-(Q+1)(Q-5)(Q-15)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -19 & 55 & 75 \\ & & -1 & 20 & -75 \\ \hline & 1 & -20 & 75 & 0 \end{array}$$

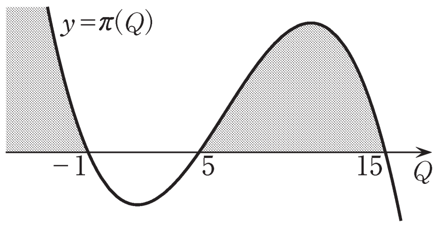
$\to$ネ，ノ，ハヒ

よって，$\pi(Q)>0$ を満たす Q の値の範囲は

$Q<-1$，$5<Q<15$

$Q>0$ より　　$5<Q<15$

よって，$5<Q<15$ を満たす $Q=11$ で，$\pi(Q)$ は最大となる。



3　解答　**(1)ア**—①　**イ.** 1　**ウ.** 1　**エ**—②　**オ.** 1　**カ**—④　**キ**—①

(2)ク—⑦　**ケ.** −　**コ.** 3　**サ.** 3　**シ.** 1　**ス.** 4　**セ.** 4　**ソ.** 0

タチ. 12　**ツ.** 2　**テト.** 12　**ナニ.** 12　**ヌネ.** 12　**ノハヒ.** −12

(3)フ. 0　**ヘ.** 3　**ホ.** 4

解説

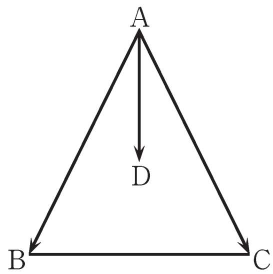
《ベクトル方程式，空間ベクトル，平面と直線の交点，垂直条件》

(1)　点Dが△ABCの周および内部にある条件は

$\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AC}$

$(0\leqq k\leqq 1,\ 0\leqq l\leqq 1,\ 0\leqq k+l\leqq 1)$

と表される。　→ア～オ



これを変形すると

$\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=k(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+l(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

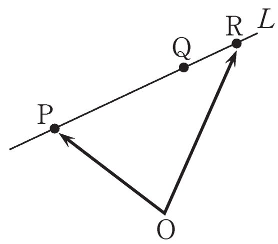
$\overrightarrow{OD}=\{1-(k+l)\}\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}+l\overrightarrow{OC}$

よって

$\vec{d}=\{1-(k+l)\}\vec{a}+k\vec{b}+l\vec{c}$　→カ，キ

(2)　まず，2点P，Qを通る直線 L 上の点をR，m を媒介変数とすると

$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+m\overrightarrow{PQ}$



と表される。これを変形すると

$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+m(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP})$

$\overrightarrow{OR}=(1-m)\overrightarrow{OP}+m\overrightarrow{OQ}$

よって

$\vec{r}=(1-m)\vec{p}+m\vec{q}$　→ク

また，平面 S は，△ABCを含むので，平面 S 上の点D′の位置ベクトル $\overrightarrow{d'}$ は

$\overrightarrow{d'}=\{1-(k+l)\}\vec{a}+k\vec{b}+l\vec{c}$

と表される。ここで，A$(0,\ 1,\ u)$，B$(-2,\ -2,\ 0)$，C$(2,\ -2,\ 0)$，P$(0,\ 0,\ 4)$，Q$(0,\ 1,\ 0)$ であるから

$$\vec{a}=(0,\ 1,\ u),\ \vec{b}=(-2,\ -2,\ 0),\ \vec{c}=(2,\ -2,\ 0),$$
$$\vec{p}=(0,\ 0,\ 4),\ \vec{q}=(0,\ 1,\ 0)$$

となるので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{d'}&=\{1-(k+l)\}\vec{a}+k\vec{b}+l\vec{c}\\&=(1-k-l)(0,\ 1,\ u)+k(-2,\ -2,\ 0)+l(2,\ -2,\ 0)\\&=(0,\ 1-k-l,\ u(1-k-l))+(-2k,\ -2k,\ 0)+(2l,\ -2l,\ 0)\\&=(-2k+2l,\ -3k-3l+1,\ u(1-k-l))\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}\vec{r}&=(1-m)\vec{p}+m\vec{q}=(1-m)(0,\ 0,\ 4)+m(0,\ 1,\ 0)\\&=(0,\ 0,\ 4-4m)+(0,\ m,\ 0)=(0,\ m,\ 4-4m)\end{aligned}$$

このとき，平面 S と直線 L の交点では

$$\overrightarrow{d'}=\vec{r}$$

が満たされるので

$$(-2k+2l,\ -3k-3l+1,\ u(1-k-l))=(0,\ m,\ 4-4m)$$

ここで，平面 S と直線 L の交点Tの座標を $(x,\ y,\ z)$ とすると，各成分を比較して

x 座標について

$$-2k+2l=0 \qquad -k+l=0 \quad \cdots\cdots① \quad \rightarrow ケ$$

y 座標について

$$-3k-3l+1=m \quad \cdots\cdots② \quad \rightarrow コ，サ，シ$$

z 座標について

$$u(1-k-l)=4-4m \quad \cdots\cdots③ \quad \rightarrow ス，セ$$

が成り立つ。①より

$$k=l \quad \cdots\cdots④$$

②，④より

$$-3k-3k+1=m \qquad k=\frac{1-m}{6} \quad \cdots\cdots⑤$$

③〜⑤より

$$u\left(1-\frac{1-m}{6}-\frac{1-m}{6}\right)=4-4m \qquad u\cdot\frac{4+2m}{6}=4-4m$$

$u(2+m)=3(4-4m)\qquad 2u+mu=12-12m$

$(u+12)m=12-2u\quad\cdots\cdots⑥$

ここで，$u=-12$ のとき，⑥は，$0=36$ となり，これは不成立。

よって，$u\neq-12$ であるから，⑥より

$$m=\frac{12-2u}{u+12}$$

以上より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\vec{r}&=(0,\ m,\ 4-4m)\\&=\left(0,\ \frac{12-2u}{u+12},\ 4-4\cdot\frac{12-2u}{u+12}\right)\\&=\left(0,\ \frac{12-2u}{u+12},\ \frac{12u}{u+12}\right)\quad\text{→ソ〜ネ}\end{aligned}$$

となり，交点Tの座標ともなる。

また，$u=-12$ のとき，平面 S と直線 L は交点を持たない。 →ノハヒ

(3)　まず，(2)の⑤，⑥より，m を消去すると

$$k=\frac{1-\dfrac{12-2u}{u+12}}{6}=\frac{u+12-(12-2u)}{6(u+12)}=\frac{u}{2(u+12)}$$

なので，④より

$$k=l=\frac{u}{2(u+12)}\quad\cdots\cdots⑦$$

となる。このとき，交点Tが△ABCの周および内部にあるとき

(1)より

$$\overrightarrow{\mathrm{AT}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}+l\overrightarrow{\mathrm{AC}}\quad(0\leqq k\leqq1,\ 0\leqq l\leqq1,\ 0\leqq k+l\leqq1)$$

⑦より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AT}}&=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}+k\overrightarrow{\mathrm{AC}}\quad(0\leqq k\leqq1,\ 0\leqq 2k\leqq1)\\&=k(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})\quad\left(0\leqq k\leqq\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

ここで，$0\leqq k\leqq\dfrac{1}{2}$ と⑦より

$$0\leqq\frac{u}{2(u+12)}\leqq\frac{1}{2}$$

各辺に $2(u+12)^2$ (>0) をかけると

$0 \leqq u(u+12) \leqq (u+12)^2$

$0 \leqq u(u+12)$　……⑧，$u(u+12) \leqq (u+12)^2$　……⑨

⑧より

$u(u+12) \geqq 0$　　$u \leqq -12,\ 0 \leqq u$

$u \neq -12$ より

$u < -12,\ 0 \leqq u$　……⑧′

⑨より

$(u+12)^2 - u(u+12) \geqq 0$　　$(u+12)\{(u+12)-u\} \geqq 0$

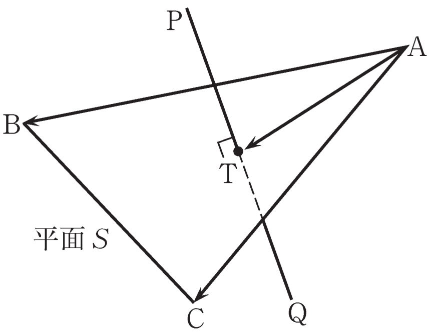
$(u+12)\cdot 12 \geqq 0$　　$u \geqq -12$

$u \neq -12$ より

$u > -12$　……⑨′

⑧′かつ⑨′より

$u \geqq 0$　→フ



また，$0 \leqq u < 6$ のとき，線分 PT の長さが，平面 S と点 P の距離と等しくなる条件は，(平面 S)$\perp \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，すなわち

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$　かつ　$\overrightarrow{\mathrm{AC}} \perp \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$

である。ここで

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b} - \vec{a} = (-2,\ -2,\ 0) - (0,\ 1,\ u)$

$= (-2,\ -3,\ -u)$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c} - \vec{a} = (2,\ -2,\ 0) - (0,\ 1,\ u)$

$= (2,\ -3,\ -u)$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \vec{q} - \vec{p} = (0,\ 1,\ 0) - (0,\ 0,\ 4)$

$= (0,\ 1,\ -4)$

であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ より

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = 0$　　$(-2,\ -3,\ -u) \cdot (0,\ 1,\ -4) = 0$

$-2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 - u(-4) = 0$　　$u = \dfrac{3}{4}$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} \perp \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ より

$\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = 0$　　$(2,\ -3,\ -u) \cdot (0,\ 1,\ -4) = 0$

$2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 - u(-4) = 0$　　$u = \dfrac{3}{4}$

以上より，求める u の値は

$$u=\frac{3}{4}$$ →へ，ホ