数　学

Ⅰ 解答

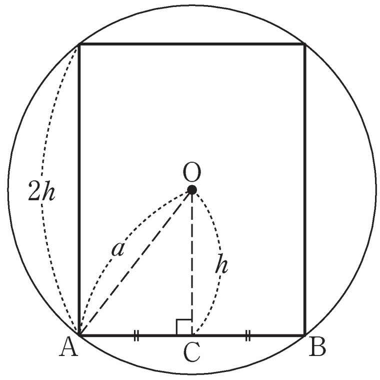
(1)　半径 a の球の表面積 $S(a)$ は

$$S(a)=4\pi a^2 \quad \cdots\cdots(答)$$

このとき

$$S'(a)=8\pi a \quad \cdots\cdots(答)$$

(2)　球の中心をOとし，右図のようにOを通り球に内接する直円柱の底面に垂直な断面を考える。今，断面上で右図のように球面と直円柱の接点をA，Bとし線分ABの中点をCとすると，線分ABは直円柱の底面の円の直径であり，Cは底面の円の中心である。このとき，$\mathrm{OA}=a$, $\mathrm{OC}=\dfrac{1}{2}\times 2h=h$ より，直円柱の半径は



$$\mathrm{AC}=\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{OC}^2}=\sqrt{a^2-h^2}$$

よって，直円柱の体積を V とすると

$$V=\pi(a^2-h^2)\cdot 2h=2\pi(a^2h-h^3) \quad \cdots\cdots(答)$$

(3)　$a=3$ のとき $V=V(h)$ であるから

$$V(h)=2\pi(9h-h^3)$$

したがって

$$V'(h)=2\pi(9-3h^2)=6\pi(\sqrt{3}+h)(\sqrt{3}-h)$$

ここで，$0<h<a$ より $0<h<3$ であるから，$V(h)$ の増減は右の表のようになる。

h	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	3
$V'(h)$		$+$	0	$-$	
$V(h)$		↗	極大	↘	

このとき

$$V(\sqrt{3})=2\pi(9\sqrt{3}-3\sqrt{3})=12\sqrt{3}\pi$$

であり，$h=\sqrt{3}$ のとき，$2h=2\sqrt{3}$ である。

よって，直円柱の体積の最大値と，そのときの直円柱の高さは

最大値 $12\sqrt{3}\pi$，高さ $2\sqrt{3}$　……(答)

II 解答　(1)　等差数列 $\{a_n\}$ において，$a_{10}<a_{11}<a_{12}$ より，公差を d とおくと $d>0$ で

$$a_{10}=a_{11}-d,\ a_{12}=a_{11}+d$$

が成り立つ。

与えられた条件から

$$a_{10}+a_{11}+a_{12}=6,\ a_{10}a_{11}a_{12}=0$$

このとき

$$(a_{11}-d)+a_{11}+(a_{11}+d)=6$$

$$a_{11}=2$$

したがって

$$(a_{11}-d)a_{11}(a_{11}+d)=0$$

より　$(2-d)(2+d)=0$

$d>0$ より　$d=2$

$a_{11}=2$，$d=2$ であるから

$$a_{11}=a_1+2(11-1)$$

より　$a_1=-18$

よって，等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=-18+2(n-1)=2n-20 \quad \cdots\cdots(答)$$

次に，$b_{n+1}-b_n=a_n$ であるから，$n\geqq 2$ において

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-20)=b_1+(n-1)n-20(n-1)$$

$$=n^2-21n+20+b_1$$

これは $n=1$ のときも成り立つ。

よって　$b_n=n^2-21n+20+b_1$　……(答)

(2)　$a_n=2n-20\leqq 0$ より　$n\leqq 10$

これを満たす最大の n の値が m であるから

$$m=10$$

このとき

$$\sum_{k=1}^{10}b_k=-570$$

$$\sum_{k=1}^{10} b_k = \sum_{k=1}^{10} (k^2-21k+20+b_1)$$

$$=\frac{1}{6}\cdot 10\cdot 11\cdot 21-21\cdot\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 11+10(20+b_1)$$

$$=10b_1-570$$

したがって　　$10b_1-570=-570$

よって　　$b_1=0$　……(答)

(3)　　$b_n=n^2-21n+20+b_1=\left(n-\frac{21}{2}\right)^2-\frac{361}{4}+b_1$

したがって，$n=10$ または $n=11$ のとき b_n は最小となる。

このとき，$b_{10}=b_{11}=-90+b_1$ であるから，すべての自然数 n に対して，つねに $b_n \geqq 0$ となる条件は

$-90+b_1 \geqq 0$　すなわち　$b_1 \geqq 90$

よって，これを満たす b_1 の最小値は

$b_1=90$　……(答)

別解　数列 $\{a_n\}$ は数列 $\{b_n\}$ の階差数列であるから

$b_{n+1}-b_n=a_n=2(n-10)$

したがって，$n-10$ の符号に着目して

$n \leqq 9$ のとき，$b_{n+1}-b_n<0$ より

$b_1>b_2>\cdots>b_9>b_{10}$

$n=10$ のとき，$b_{n+1}-b_n=0$ より

$b_{10}=b_{11}$

$n \geqq 11$ のとき，$b_{n+1}-b_n>0$ より

$b_{11}<b_{12}<b_{13}<\cdots$

よって，b_n は $n=10$，11 のとき最小値 $-90+b_1$ をとるから，すべての自然数 n に対して，つねに $b_n \geqq 0$ となる条件は

$-90+b_1 \geqq 0$　すなわち　$b_1 \geqq 90$

よって，これを満たす b_1 の最小値は　　$b_1=90$

Ⅲ ― 解答

(1)　中心 C$(2a,\ 0)$，半径 a の円 S の方程式は

$$(x-2a)^2+y^2=a^2$$

これが M$(2,\ 1)$ を通る条件は，$(2-2a)^2+1=a^2$ であるから，整理し

て

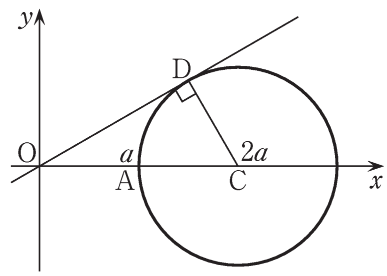
$$3a^2-8a+5=0$$

$$(3a-5)(a-1)=0$$

$a>1$ に注意して

$$a=\frac{5}{3} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

$\mathrm{OC}=2a$，$\mathrm{CD}=a$ より，$\cos\angle\mathrm{OCD}=\frac{1}{2}$ であるから，$\angle\mathrm{OCD}=60^\circ$ である。



よって，D の x 座標は

$$2a-a\cos 60^\circ=\frac{3}{2}a$$

y 座標は　　$a\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

$a=\frac{5}{3}$ であるから　　$\mathrm{D}\left(\frac{5}{2},\ \frac{5\sqrt{3}}{6}\right)$　$\cdots\cdots$(答)

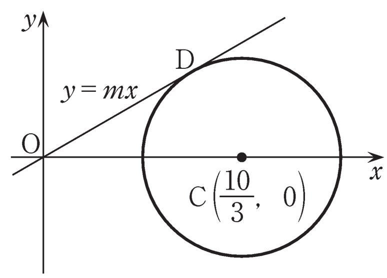
別解　次のように，円と直線が接するときの直線の傾きを判別式を用いて求め，そこからDの座標を求めてもよい。

円 S の方程式は

$$\left(x-\frac{10}{3}\right)^2+y^2=\frac{25}{9} \quad \cdots\cdots①$$

ここで，円 S の接線 OD の方程式を

$$y=mx \quad \cdots\cdots②$$



とおくと，D の y 座標は正であるから $m>0$ であり，①，②から y を消去すると

$$\left(x-\frac{10}{3}\right)^2+(mx)^2=\frac{25}{9}$$

整理して

$$9(m^2+1)x^2-60x+75=0 \quad \cdots\cdots③$$

この x の 2 次方程式は重解をもつから，③の判別式を D とおくと，$D=0$ である。

$$\frac{D}{4}=30^2-9(m^2+1)\cdot 75=9\cdot 25(1-3m^2)$$

したがって，$1-3m^2=0$ より

$$m^2=\frac{1}{3}$$

これを③に代入して解くと，$9\left(\frac{1}{3}+1\right)x^2-60x+75=0$ より

$$4x^2-20x+25=0$$
$$(2x-5)^2=0$$

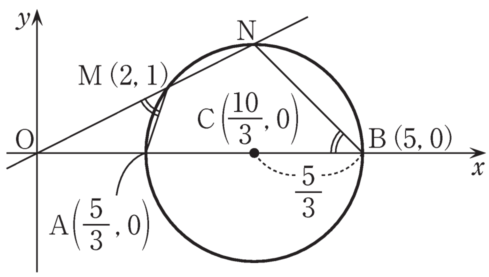
ゆえに，点Dの x 座標は　　$x=\frac{5}{2}$

$m>0$ より $m=\frac{1}{\sqrt{3}}$ であるから，②より点Dの y 座標は

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{5}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{6}$$

よって　　$\mathrm{D}\left(\frac{5}{2},\ \frac{5\sqrt{3}}{6}\right)$

(2)　四角形ABNMは円 S に内接するから



$$\angle\mathrm{OBN}=\angle\mathrm{OMA}$$

よって　　$\triangle\mathrm{OBN}\backsim\triangle\mathrm{OMA}$

$\triangle$OBNと$\triangle$OMAの相似比はOB：OMであるから，$\triangle$OBNと$\triangle$OMAの面積比は$\mathrm{OB}^2:\mathrm{OM}^2$である。

ここで，B (5，0) より　　$\mathrm{OB}^2=25$

また，M (2，1) より　　$\mathrm{OM}^2=2^2+1^2=5$

よって　　$\dfrac{\triangle\mathrm{OBN}}{\triangle\mathrm{OMA}}=\dfrac{\mathrm{OB}^2}{\mathrm{OM}^2}=5$　……(答)

別解　方べきの定理より

$$\mathrm{OM}\cdot\mathrm{ON}=\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}$$

$\mathrm{OM}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，$\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}=\frac{5}{3}\cdot 5=\frac{25}{3}$ であるから

$\sqrt{5}\,\mathrm{ON}=\frac{25}{3}$　よって　$\mathrm{ON}=\frac{5\sqrt{5}}{3}$

したがって

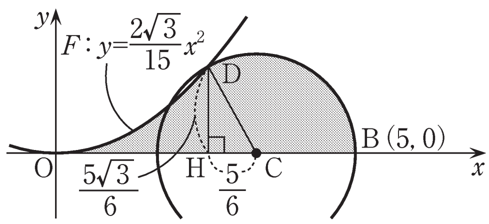
$$\frac{\triangle \mathrm{OBN}}{\triangle \mathrm{OMA}}=\frac{\mathrm{OB}\cdot\mathrm{ON}}{\mathrm{OM}\cdot\mathrm{OA}}=\frac{5\cdot\frac{5\sqrt{5}}{3}}{\sqrt{5}\cdot\frac{5}{3}}=5$$

(3) $y=kx^2$ が $\mathrm{D}\left(\frac{5}{2},\ \frac{5\sqrt{3}}{6}\right)$ を通るとき

$$\frac{5\sqrt{3}}{6}=k\left(\frac{5}{2}\right)^2$$

よって　　$k=\frac{2\sqrt{3}}{15}$　……(答)

次に，$F:y=\frac{2\sqrt{3}}{15}x^2$ と x 軸および弧 BD で囲まれる領域は右図の網かけ部分である。



点Dから x 軸に下ろした垂線と x 軸の交点をHとすると，$\mathrm{D}\left(\frac{5}{2},\ \frac{5\sqrt{3}}{6}\right)$，$\mathrm{C}\left(\frac{10}{3},\ 0\right)$，$\mathrm{H}\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$ であるから

$$\mathrm{DH}=\frac{5\sqrt{3}}{6},\ \mathrm{CH}=\frac{10}{3}-\frac{5}{2}=\frac{5}{6}$$

また，$\angle\mathrm{DCH}=60^\circ$ より，扇形 CBD の中心角は 120° である。

したがって，求める領域の面積は，F と線分 DH と x 軸で囲まれる領域の面積と，直角三角形 CDH の面積，および，扇形 CBD の面積の和で求められる。よって，求める面積を T とおくと

$$T=\int_0^{\frac{5}{2}}\frac{2\sqrt{3}}{15}x^2dx+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^2\pi$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{15}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{5}{2}}+\frac{25\sqrt{3}}{72}+\frac{25}{27}\pi$$

$$=\frac{25\sqrt{3}}{24}+\frac{25}{27}\pi\quad\text{……(答)}$$