数　学

Ⅰ 解答

$P(x)=x^{10}+ax^9+b$

(1)　$P(x)$ を x^2-1 で割ったときの商を $Q_1(x)$ とおくと

$$P(x)=(x^2-1)Q_1(x)-2x+5$$

よって，$P(1)=3$，$P(-1)=7$ より

$$\begin{cases}1+a+b=3\\1-a+b=7\end{cases}\quad これを解くと\quad \begin{cases}a=-2\\b=4\end{cases}\quad \cdots\cdots(答)$$

(2)　$P(x)-P_1(x)$ を x^2-x-2 で割ったときの商を $Q_2(x)$ とおくと

$$P(x)-P_1(x)=(x^2-x-2)Q_2(x)+7x-5$$

よって

$$\begin{aligned}P_1(x)&=(x^{10}-2x^9+4)-(x^2-x-2)Q_2(x)-7x+5\\&=x^{10}-2x^9-7x+9-(x^2-x-2)Q_2(x)\end{aligned}$$

より，$P_1(x)$ を x^2-x-2 で割ったときの余りは，$x^{10}-2x^9-7x+9$ を x^2-x-2 で割ったときの余りと一致する。

$x^{10}-2x^9-7x+9$ を x^2-x-2 で割ったときの商を $Q_3(x)$，余りを $px+q$ とおくと

$$\begin{aligned}x^{10}-2x^9-7x+9&=(x^2-x-2)Q_3(x)+px+q\\&=(x+1)(x-2)Q_3(x)+px+q\end{aligned}$$

この両辺に $x=-1$，2 を代入すると

$$\begin{cases}19=-p+q\\-5=2p+q\end{cases}\quad これを解くと\quad \begin{cases}p=-8\\q=11\end{cases}$$

よって，求める余りは　$-8x+11$　……(答)

Ⅱ 解答

(1)　$n=3$ のとき

3 枚のカードの取り出し方は　$3\times2\times1$ 通り

a_1，a_2，a_3 が等差数列となるような（a_1，a_2，a_3）の組は

$(a_1,\ a_2,\ a_3)=(1,\ 2,\ 3),\ (3,\ 2,\ 1)$ の２通り

よって，求める確率は　$\dfrac{2}{3\times2\times1}=\dfrac{1}{3}$　……(答)

(2)　$n=7$ のとき

３枚のカードの取り出し方は　$7\times6\times5$ 通り

a_1，a_2，a_3 が等差数列となるのは

$$a_2-a_1=a_3-a_2 \quad \text{すなわち} \quad a_2=\frac{a_1+a_3}{2}$$

が成り立つときである。

これを満たす（a_1，a_2，a_3）が存在するのは，（a_1，a_3）の偶奇が一致するときであるので，そのような（a_1，a_3）の選び方は

（a_1，a_3）がともに奇数のとき　$4\times3=12$ 通り

（a_1，a_3）がともに偶数のとき　$3\times2=6$ 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{12+6}{7\times6\times5}=\dfrac{3}{35}$　……(答)

(3)　$n=100$ のとき

３枚のカードの取り出し方は　$100\times99\times98$ 通り

(2)と同様に考えると，（a_1，a_3）の偶奇が一致するような選び方は

（a_1，a_3）がともに奇数のとき　50×49 通り

（a_1，a_3）がともに偶数のとき　50×49 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{50\times49\times2}{100\times99\times98}=\dfrac{1}{198}$　……(答)

Ⅲ　解答　$C_1: y=-x^2-4x-2$

(1)　C_1 について，$y'=-2x-4$ より，$x=t$ における接線の方程式は

$$y-(-t^2-4t-2)=(-2t-4)(x-t)$$

これが点 A$(0,\ 7)$ を通るとき

$$7-(-t^2-4t-2)=(-2t-4)(0-t) \qquad t^2=9 \qquad \therefore\quad t=\pm3$$

接線 l の傾きは正であるので　$-2t-4>0$　$\therefore$　$t<-2$

よって，求める接線の方程式は $t=-3$ のときであり

$y-1=2(x+3)$　すなわち　$y=2x+7$　……(答)

(2)　$\mathrm{P}(p,\ -p^2-4p-2)$，$\mathrm{Q}(X,\ Y)$ とおくと

点Qは線分 AP を 1：2 に内分する点であるので

$$\begin{cases} X=\dfrac{2\cdot 0+1\cdot p}{1+2} \\ Y=\dfrac{2\cdot 7+1\cdot(-p^2-4p-2)}{1+2} \end{cases} \iff \begin{cases} X=\dfrac{p}{3} & \cdots\cdots① \\ Y=\dfrac{-p^2-4p+12}{3} & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①より　　$p=3X$

②に代入すると　　$Y=\dfrac{-(3X)^2-4(3X)+12}{3}$

$=-3X^2-4X+4$

よって，点Qは放物線 $y=-3x^2-4x+4$ 上にある。

逆に，この図形上の任意の点は条件を満たす。

ゆえに，点Qの軌跡 C_2 の方程式は　　$y=-3x^2-4x+4$　……(答)

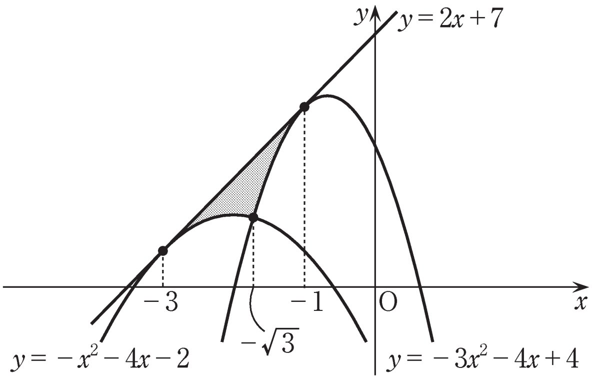
(3)　$-x^2-4x-2=-3x^2-4x+4$ とすると

$2x^2=6$　　$x^2=3$　　$\therefore\ \ x=\pm\sqrt{3}$

$2x+7=-3x^2-4x+4$ とすると

$3x^2+6x+3=0$　　$3(x+1)^2=0$　　$\therefore\ \ x=-1$

求める図形は次図の網かけ部分であるので，求める面積を S とすると



$$S=\int_{-3}^{-\sqrt{3}}\{(2x+7)-(-x^2-4x-2)\}dx$$

$$+\int_{-\sqrt{3}}^{-1}\{(2x+7)-(-3x^2-4x+4)\}dx$$

$$=\int_{-3}^{-\sqrt{3}}(x+3)^2dx+\int_{-\sqrt{3}}^{-1}3(x+1)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x+3)^3\right]_{-3}^{-\sqrt{3}}+\left[(x+1)^3\right]_{-\sqrt{3}}^{-1}$$

$$=\frac{1}{3}(-\sqrt{3}+3)^3-(-\sqrt{3}+1)^3$$

$$=\frac{1}{3}\{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)\}^3-\{-(\sqrt{3}-1)\}^3$$

$$=\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)^3+(\sqrt{3}-1)^3$$

$$=(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)^3$$

$$=(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)^2$$

$$=2(\sqrt{3}-1)^2=8-4\sqrt{3}$$ ……(答)