数　学

Ⅰ

解答 $2x^2-4bx+3ab=0$ ……①

$x^2+2(a-1)x+b+2a^2-6a-5=0$ ……②

①は重解をもつので，①の判別式を D_1 とすると

$\dfrac{D_1}{4}=(2b)^2-2\cdot 3ab=0$

$2b(2b-3a)=0$

$\therefore\quad b=0$ または $b=\dfrac{3}{2}a$ ……③

②は実数解をもつので，②の判別式を D_2 とすると

$\dfrac{D_2}{4}=(a-1)^2-(b+2a^2-6a-5)\geqq 0$

$b\leqq -a^2+4a+6$ ……④

(1) $a=5$ のとき

③より　$b=0$ または $b=\dfrac{15}{2}$

④より　$b\leqq 1$

よって，③，④より

$b=0$ ……(答)

(2) $b=0$ のとき

④より　$0\leqq -a^2+4a+6$

$a^2-4a-6\leqq 0$

$\therefore\quad 2-\sqrt{10}\leqq a\leqq 2+\sqrt{10}$ ……⑤

$b=\dfrac{3}{2}a$ のとき

④より　$\dfrac{3}{2}a\leqq -a^2+4a+6$

$$2a^2-5a-12\leqq 0$$

$$(2a+3)(a-4)\leqq 0$$

$\therefore\quad -\dfrac{3}{2}\leqq a\leqq 4\quad\cdots\cdots⑥$

このとき　$-\dfrac{9}{4}\leqq b\leqq 6\quad\cdots\cdots⑦$

$$(2-\sqrt{10})-\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{7}{2}-\sqrt{10}=\sqrt{\frac{49}{4}}-\sqrt{10}>0$$

よって　$-\dfrac{3}{2}<2-\sqrt{10}$

$$(2+\sqrt{10})-4=\sqrt{10}-2=\sqrt{10}-\sqrt{4}>0$$

よって　$4<2+\sqrt{10}$

以上より，a のとり得る範囲は⑤または⑥，すなわち

$$-\frac{3}{2}\leqq a\leqq 2+\sqrt{10}\quad\cdots\cdots(答)$$

b のとり得る範囲は $b=0$ または⑦，すなわち

$$-\frac{9}{4}\leqq b\leqq 6\quad\cdots\cdots(答)$$

(3)　$b=0$ のとき

⑤を満たす整数は，$3<\sqrt{10}<4$ より

$$-1\leqq a\leqq 5$$

$$a=-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

$b\neq 0$ のとき　$b=\dfrac{3}{2}a$

a は⑥を満たし，a，b はともに整数であることから a は 2 の倍数。
ただし，$b\neq 0$ より　$a\neq 0$

$\therefore\quad a=2,\ 4$

以上より，求める $(a,\ b)$ の組の個数は　9 組　$\cdots\cdots$(答)

Ⅱ 解答

x 軸方向に $+1$ 平行移動することを→，x 軸方向に -1 平行移動することを←，y 軸方向に $+1$ 平行移動することを↑，y 軸方向に -1 平行移動することを↓と表すことにする。

(1)　玉を 2 回取り出し終えたとき，P が原点にあるのは

$\rightarrow\leftarrow$　　または　　$\uparrow\downarrow$

のときであるので，その順番も考慮して，求める確率は

$$2!\left(\frac{1}{4}\right)^2\times 2=\frac{1}{4}\quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　玉を3回取り出し終えたとき，Pが点（1，0）にあるのは

$\rightarrow\rightarrow\leftarrow$　　または　　$\rightarrow\uparrow\downarrow$

のときであるので，その順番も考慮して，求める確率は

$$\frac{3!}{2!1!}\left(\frac{1}{4}\right)^3+3!\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{9}{64}\quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(3)　玉を4回取り出し終えたとき，Pが点（1，1）にあるのは

$\rightarrow\rightarrow\leftarrow\uparrow$　　または　　$\rightarrow\uparrow\uparrow\downarrow$

のときであるので，その順番も考慮して，求める確率は

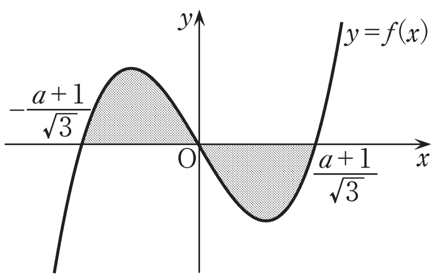
$$\frac{4!}{2!1!1!}\left(\frac{1}{4}\right)^4\times 2=\frac{3}{32}\quad \cdots\cdots(\text{答})$$

III　解答　$f(x)=3x^3-(a+1)^2x\quad (a>0)$

(1)　$f(x)=0$ とすると，$f(x)=3x\left(x+\dfrac{a+1}{\sqrt{3}}\right)\left(x-\dfrac{a+1}{\sqrt{3}}\right)$ より

$$x=0,\quad \pm\frac{a+1}{\sqrt{3}}$$

$f(-x)=3(-x)^3-(a+1)^2(-x)=-\{3x^3-(a+1)^2x\}=-f(x)$ より，$y=f(x)$ のグラフは原点に関して対称であるから，題意が成り立つとき



$$\int_0^{\frac{a+1}{\sqrt{3}}}\{-f(x)\}\,dx=\frac{27}{2}\times\frac{1}{2}$$

$$\int_0^{\frac{a+1}{\sqrt{3}}}\{-3x^3+(a+1)^2x\}\,dx=\frac{27}{4}$$

$$\left[-\frac{3}{4}x^4+\frac{(a+1)^2}{2}x^2\right]_0^{\frac{a+1}{\sqrt{3}}}=\frac{27}{4}$$

$$-\frac{(a+1)^4}{12}+\frac{(a+1)^4}{6}=\frac{27}{4}$$

$$(a+1)^4=81$$

$a>0$ より　　$a+1=3$

$\therefore$　$a=2$　……(答)

(2)　$f'(x)=9x^2-(a+1)^2=9\left(x+\dfrac{a+1}{3}\right)\left(x-\dfrac{a+1}{3}\right)$ より

$f'(x)=0$ とすると　　$x=\pm\dfrac{a+1}{3}$

よって，$f(x)$ の増減は右の表のようになる。

x	$\cdots$	$-\dfrac{a+1}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{a+1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

したがって，増減表より

$$p=-\frac{a+1}{3}$$

ゆえに，$(X,\ Y)=(p,\ f(p))$ とおくと

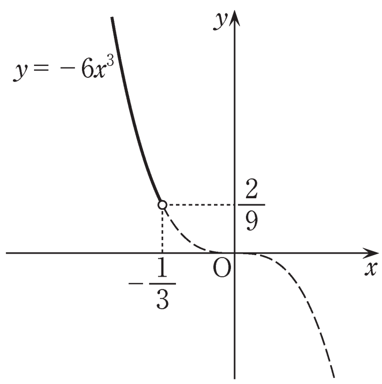
$$\begin{cases} X=p \\ Y=3p^3-(a+1)^2p \end{cases}$$

$p=-\dfrac{a+1}{3}$ より　　$X=-\dfrac{a+1}{3}$

$a>0$ より　　$X<-\dfrac{1}{3}$

$$Y=3X^3-(-3X)^2X=-6X^3$$

よって，点 $(p,\ f(p))$ は曲線 $y=-6x^3$ の $x<-\dfrac{1}{3}$ の範囲にある。



逆に，この図形上の点は条件を満たす。

以上より，求める点 $(p,\ f(p))$ の軌跡は曲線 $y=-6x^3$ の $x<-\dfrac{1}{3}$ の部分。

これを図示すると右の図の太線部分。

ただし，点 $\left(-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{9}\right)$ は含まない。　……(答)