数　学

Ⅰ **解答** 解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-3$$

(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1^2-2\cdot(-3)=7$ ……(答)

(2) $(\text{与式})=(\alpha^2+\beta^2)^2-3\alpha^2\beta^2-2\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)$

$=7^2-3\cdot(-3)^2-2\cdot(-3)\cdot 7$

$=64$ ……(答)

(3) $2x^3-x^2-x+6=(x^2-x-3)(2x+1)+6x+9$ ……①

$x^4+x^3-5x^2+9=(x^2-x-3)(x^2+2x)+6x+9$ ……②

一方，α，β が 2 次方程式 $x^2-x-3=0$ の解であるから

$\alpha^2-\alpha-3=0,\ \beta^2-\beta-3=0$

よって，①で $x=\alpha$ として

$2\alpha^3-\alpha^2-\alpha+6=(\alpha^2-\alpha-3)(2\alpha+1)+6\alpha+9$

$=0\cdot(2\alpha+1)+6\alpha+9$

$=6\alpha+9$

②で $x=\beta$ として

$\beta^4+\beta^3-5\beta^2+9=(\beta^2-\beta-3)(\beta^2+2\beta)+6\beta+9$

$=0\cdot(\beta^2+2\beta)+6\beta+9$

$=6\beta+9$

したがって

$(\text{与式})=(6\alpha+9)(6\beta+9)=9(2\alpha+3)(2\beta+3)$

$=9\{4\alpha\beta+6(\alpha+\beta)+9\}$

$=9\{4\cdot(-3)+6\cdot 1+9\}$

$=27$ ……(答)

別解 α，β は $x^2-x-3=0$ の解であるから，$\alpha^2-\alpha-3=0$，$\beta^2-\beta-3=0$ が成り立つ。よって

$\alpha^2=\alpha+3$，$\alpha^3=\alpha(\alpha+3)=(\alpha+3)+3\alpha=4\alpha+3$

したがって

$2\alpha^3-\alpha^2-\alpha+6=2(4\alpha+3)-(\alpha+3)-\alpha+6=6\alpha+9$

同様に

$\beta^2=\beta+3$，$\beta^3=4\beta+3$

$$\begin{aligned}\beta^4&=\beta(4\beta+3)=4(\beta+3)+3\beta\\&=7\beta+12\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\beta^4+\beta^3-5\beta^2+9&=(7\beta+12)+(4\beta+3)-5(\beta+3)+9\\&=6\beta+9\end{aligned}$$

（以下〔解答〕と同じ）

Ⅱ 解答

(1)　200 より大きくなるのは，百の位が 2 または 3 のときである。

(i)　百の位が 2 のとき

$2aa$（十の位と一の位が同じ数字）となるのは　　211，233 の 2 個

$2ab$（十の位と一の位が異なる数字）となるのは　　$3\times2=6$ 個

よって　　$2+6=8$ 個

(ii)　百の位が 3 のとき

$3aa$ となるのは　　311，322，333 の 3 個

$3ab$ となるのは　　$3\times2=6$ 個

よって　　$3+6=9$ 個

したがって，(i)，(ii)より，求める個数は

$8+9=17$ 個　……(答)

(2)　23000 より大きくなるのは，23□□□，3□□□□ のときである。

(i)　23□□□ のとき

(ア)　下 3 桁がすべて同じ数字のとき　　23111，23333 の 2 個

(イ)　下 3 桁が 2 種類の数字のとき

数字 a のカードを 2 枚，数字 b のカードを 1 枚使うとすると

$(a,\ b)=(1,\ 2)$，$(1,\ 3)$，$(3,\ 1)$，$(3,\ 2)$

の 4 通りあり，並べ方がそれぞれ $\dfrac{3!}{2!1!}=3$ 通りあるから

$4\times3=12$ 個

㈦ 下3桁がすべて異なる数字のとき

1，2，3のカードを1枚ずつ使うから　　$3!=6$ 個

よって，㈠〜㈦より

$2+12+6=20$ 個

(ii) 3□□□□ のとき

㈣ 下4桁がすべて同じ数字のとき　　31111 の1個

㈤ 下4桁が2種類の数字のとき

(a) 数字 a のカードを3枚，数字 b のカードを1枚使う場合

$(a,\ b)=(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (3,\ 1),\ (3,\ 2)$

の4通りあり，並べ方がそれぞれ $\dfrac{4!}{3!1!}=4$ 通りあるから

$4\times4=16$ 個

(b) 2種類の数字のカードを2枚ずつ使う場合

使う数字の組が ${}_3C_2=3$ 通りあり，それぞれの組で並べ方が $\dfrac{4!}{2!2!}=6$ 通りあるから

$3\times6=18$ 個

㈥ 下4桁が3種類の数字のとき

同じ数字のカードを2枚使い，そのカードは1か2か3かの3通りあり，それに応じて残りのカードが決まる。

並べ方がそれぞれ $\dfrac{4!}{2!1!1!}=12$ 通りあるから

$3\times12=36$ 個

よって，㈣〜㈥より

$1+16+18+36=71$ 個

したがって，(i)，(ii)より，求める個数は

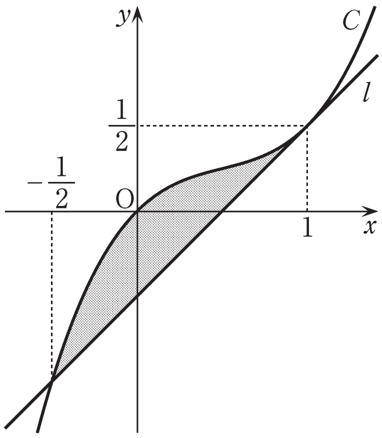
$20+71=91$ 個　……(答)

III 解答　(1)　$f'(x)=3x^2-6ax+4a^2=3(x-a)^2+a^2$

接線の傾きの最小値が $\dfrac{1}{4}$ であるから　　$a^2=\dfrac{1}{4}$

$a>0$ より　　$a=\dfrac{1}{2}$　……(答)

(2)　$a=\dfrac{1}{2}$ のとき



$$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+x,\ f'(x)=3x^2-3x+1$$

$f(1)=\dfrac{1}{2}$, $f'(1)=1$ であるから，l の方程式は

$$y-\frac{1}{2}=x-1 \qquad \therefore\quad y=x-\frac{1}{2}$$

C と l の交点の x 座標は

$$x^3-\frac{3}{2}x^2+x=x-\frac{1}{2}$$

$$x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}=0$$

$$(x-1)^2\left(x+\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\therefore\quad x=1,\ -\frac{1}{2}$$

$-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ のとき

$x^3-\dfrac{3}{2}x^2+x\geqq x-\dfrac{1}{2}$ であるから，求める面積は図の網掛け部分で

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\left\{\left(x^3-\frac{3}{2}x^2+x\right)-\left(x-\frac{1}{2}\right)\right\}dx$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}(x-1)^2\left(x+\frac{1}{2}\right)dx$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}(x-1)^2\left\{(x-1)+\frac{3}{2}\right\}dx$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\left\{(x-1)^3+\frac{3}{2}(x-1)^2\right\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}(x-1)^4+\frac{1}{2}(x-1)^3\right]_{-\frac{1}{2}}^{1}$$

$$=0-\left\{\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^4+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^3\right\}$$

$$=\frac{27}{8}\left\{\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2}\right\}$$

$$=\frac{27}{64}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$