数　学

Ⅰ 解答

(1)　$f(x)=-x^3+6ax^2-9a^2x+ab$ より

$$f'(x)=-3x^2+12ax-9a^2=-3(x-a)(x-3a)$$

$a>0$ より，$a<3a$ であるから，関数 $f(x)$ の増減は右の表のようになる。このとき

x	$\cdots$	a	$\cdots$	$3a$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

$$f(a)=-4a^3+ab,\ f(3a)=ab$$

よって

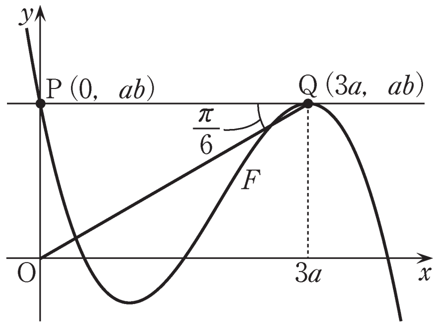
極大値 ab $(x=3a)$，極小値 $-4a^3+ab$ $(x=a)$　……(答)

(2)　$-4a^3+ab \leqq 0$ より　　$a(4a^2-b) \geqq 0$

$a>0$ であるから，$4a^2-b \geqq 0$ より　　$a^2 \geqq \dfrac{b}{4}$

よって，$b>0$ であるから　　$a \geqq \dfrac{\sqrt{b}}{2}$　……(答)

(3)　$f(0)=ab$，$f(3a)=ab$ であるから，P$(0,\ ab)$，Q$(3a,\ ab)$ より，△OPQ は右図のような直角三角形となるから



$$\mathrm{PO}:\mathrm{OQ}:\mathrm{QP}=1:2:\sqrt{3}$$

したがって　　$\dfrac{ab}{3a}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

よって　　$b=\sqrt{3}$　……(答)

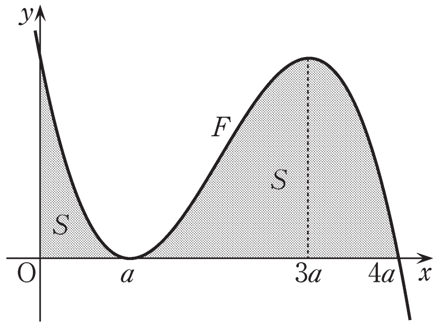
(4)　Q$(3a,\ ab)$ において，$a>0$，$b>0$ より，$ab>0$ であるから点Qが x 軸に接することはない。したがって，曲線 F が x 軸に接するのは極小値が0の場合であるから，$a>0$ に注意して

$$-4a^3+ab=0 \quad より \quad b=4a^2$$

このとき

$$f(x) = -x^3 + 6ax^2 - 9a^2x + 4a^3$$
$$= -(x-a)^2(x-4a)$$

ゆえに，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$y \leqq f(x)$ を満たす領域は右図の網掛け部分である。



よって，求める面積 S は

$$S = \int_0^{4a} (-x^3 + 6ax^2 - 9a^2x + 4a^3)\,dx$$
$$= \left[-\frac{x^4}{4} + 2ax^3 - \frac{9}{2}a^2x^2 + 4a^3x \right]_0^{4a}$$
$$= 8a^4 \quad \cdots\cdots(答)$$

Ⅱ 解答

(1) 数列 $\{b_n\}$ は，初項 -18，公差 2 の等差数列である。よって，一般項は

$$b_n = -18 + 2(n-1) = 2n - 20 \quad \cdots\cdots(答)$$

(2) 数列 $\{a_n\}$ は，$a_1 = -20$ であり，その階差数列が $\{b_n\}$ であるから

$$a_{n+1} - a_n = b_n \quad \cdots\cdots①$$

このとき　$a_2 - a_1 = b_1$，$a_3 - a_2 = b_2$

辺々を加えて，$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) = b_1 + b_2$ より

$$a_3 - a_1 = -18 - 16$$

よって　$a_3 = -20 - 34 = -54 \quad \cdots\cdots(答)$

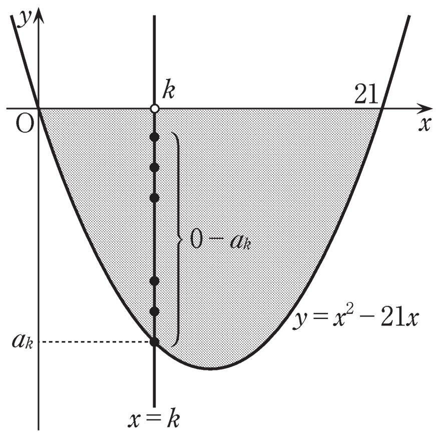
(3) $n \geqq 2$ のとき

$$a_n = -20 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k - 20) = -20 + 2\cdot\frac{1}{2}n(n-1) - 20(n-1)$$
$$= n^2 - 21n \quad \cdots\cdots(答)$$

このとき，$a_n = n(n-21)$ より，$a_n = 0$ となる自然数 n の値は

$$n = 21 \quad \cdots\cdots(答)$$

(4) $a_n = n(n-21)$ より，$a_n < 0$ となる n の値の範囲は，$0 < n < 21$ である。このとき，$a_x \leqq y < 0$ を満たす領域は右図の網掛け部分（x 軸上を除く）である。



いま，$k = 1, 2, 3, \cdots, 20$ として，直

線 $x=k$ とこの領域が共有する格子点の個数は

$$0-a_k=-k(k-21)=21k-k^2$$

よって，求める格子点の個数は

$$\sum_{k=1}^{20}(21k-k^2)=21\cdot\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 21-\frac{1}{6}\cdot 20\cdot 21\cdot 41=1540 \quad \cdots\cdots(答)$$

III 解答

(1) 三角関数の合成公式を用いて

$$x=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

$0<\theta<\pi$ であるから，$\dfrac{\pi}{4}<\theta+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{5\pi}{4}$ より

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}<\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1$$

よって　　$-1<x\leqq\sqrt{2}$ 　$\cdots\cdots$(答)

(2) $y=(\sin\theta+\cos\theta)|\sin\theta+\cos\theta|+2|\sin\theta+\cos\theta|-4\sin\theta\cos\theta$ 　$\cdots\cdots$①

とおく。$x=\sin\theta+\cos\theta$ より

$$x^2=(\cos\theta+\sin\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$$

ゆえに　　$2\sin\theta\cos\theta=x^2-1$

したがって，①を用いて y を x で表すと

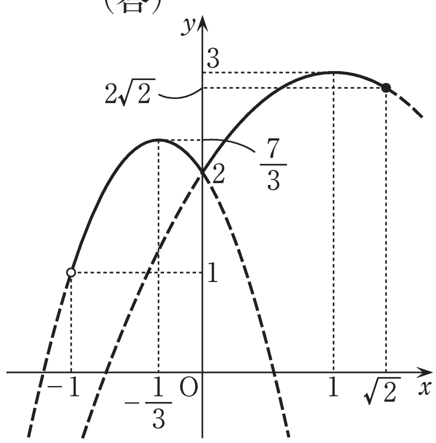
$$y=x|x|+2|x|-2(x^2-1)$$

(1)の結果から

$0\leqq x\leqq\sqrt{2}$ の場合，$y=x^2+2x-2(x^2-1)=-x^2+2x+2$

$-1<x<0$ の場合，$y=-x^2-2x-2(x^2-1)=-3x^2-2x+2$

よって　　$y=\begin{cases}-x^2+2x+2 & (0\leqq x\leqq\sqrt{2})\\ -3x^2-2x+2 & (-1<x<0)\end{cases}$ 　$\cdots\cdots$(答)



(3) (2)の結果から

$x=\sqrt{2}$ のとき　　$y=2\sqrt{2}$

$x=0$ のとき　　$y=2$

$x=-1$ のとき　　$y=1$

である。

また

$$y = -x^2 + 2x + 2$$
$$= -(x-1)^2 + 3$$
$$y = -3x^2 - 2x + 2$$
$$= -3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{7}{3}$$

よって，$y = \begin{cases} -x^2 + 2x + 2 & (0 \leqq x \leqq \sqrt{2}) \\ -3x^2 - 2x + 2 & (-1 < x < 0) \end{cases}$ のグラフは上図の実線部分のようになる。

(4) (3)のグラフから，$x=1$ のとき，y は最大値 3 をとる。 ……(答)

このとき，θ の値は $\sin\theta + \cos\theta = 1$，すなわち $\sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ より

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (0 < \theta < \pi)$$

よって　　$\theta = \frac{\pi}{2}$　……(答)