数 学

Ⅰ 解答

(1) $l : y=2x$ ……① とおく。

①に垂直な直線の傾きは $-\dfrac{1}{2}$ であるから，$Q_1(p,\ 0)$ を通り直線 l に垂直な直線の方程式は

$$y=-\frac{1}{2}(x-p) \quad \cdots\cdots ②$$

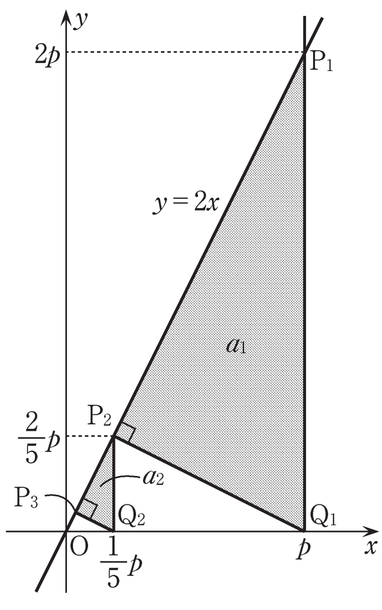
①と②の交点が P_2 である。したがって，①と②を連立して y を消去すると

$$2x=-\frac{1}{2}(x-p)$$

より　　$x=\dfrac{p}{5}$

これを①に代入すると　　$y=\dfrac{2}{5}p$

よって　　$P_2\left(\dfrac{1}{5}p,\ \dfrac{2}{5}p\right)$ ……(答)



また，$P_1Q_1=2p$，P_2 から辺 P_1Q_1 までの距離は

$$p-\frac{1}{5}p=\frac{4}{5}p$$

よって

$$a_1=\frac{1}{2}\cdot 2p\cdot\frac{4}{5}p=\frac{4}{5}p^2 \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2)(i)　$P_1Q_1 /\!/ P_2Q_2$ より，$\triangle P_1P_2Q_1 \backsim \triangle P_2P_3Q_2$ である。

ここで，$P_1Q_1=2p$，$P_2Q_2=\dfrac{2}{5}p$ であるから，$\triangle P_1P_2Q_1$ と $\triangle P_2P_3Q_2$ の相

似比は $2p:\dfrac{2}{5}p$ すなわち，5：1 である。

したがって，面積比は $5^2:1^2$ である。

よって　$\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{1^2}{5^2}=\dfrac{1}{25}$　……(答)

(ii)　(i)と同様にして，相似な 2 つの三角形 $\triangle \mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_n$ と $\triangle \mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2}\mathrm{Q}_{n+1}$ の面積比は，$a_n:a_{n+1}=25:1$ である。

したがって，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{25}$ より　$a_{n+1}=\dfrac{1}{25}a_n$

ゆえに，数列 $\{a_k\}$ は，初項 $\dfrac{4}{5}p^2$，公比 $\dfrac{1}{25}$ の等比数列である。

よって　$a_k=\dfrac{4}{5}p^2\cdot\left(\dfrac{1}{25}\right)^{k-1}=\dfrac{4p^2}{5^{2k-1}}$　……(答)

(3)　等比数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めると

$$S_n=\frac{\dfrac{4}{5}p^2\left\{1-\left(\dfrac{1}{25}\right)^n\right\}}{1-\dfrac{1}{25}}=\frac{5}{6}p^2\left\{1-\left(\frac{1}{25}\right)^n\right\}$$

したがって

$$\frac{5}{6}p^2-S_n=\frac{5}{6}p^2-\frac{5}{6}p^2\left\{1-\left(\frac{1}{25}\right)^n\right\}=\frac{5}{6}p^2\left(\frac{1}{25}\right)^n>0$$

よって　$S_n<\dfrac{5}{6}p^2$　(証明終)

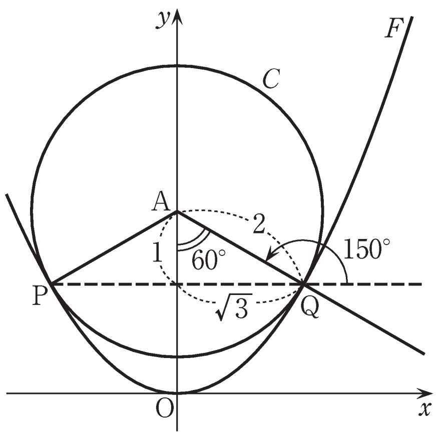
II　解答

(1)　c を正の実数として A$(0,\ c)$ とすると，円 C は x 軸と共有点をもたないから　$c>2$

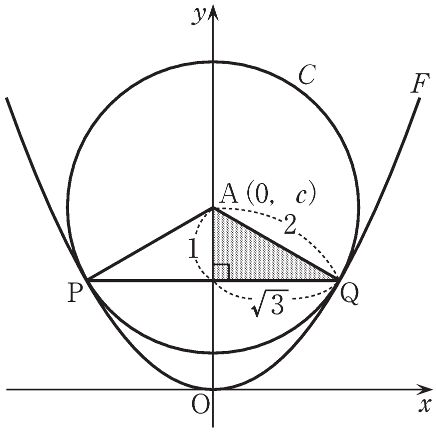
放物線 F と円 C は y 軸に関して対称であるから，$\angle \mathrm{PAQ}=120^\circ$ より $\angle \mathrm{OAQ}=60^\circ$ となる。

右図から，直線 AQ と x 軸正方向とのなす角は 150° である。よって，直線 AQ の傾きは

$$\tan 150^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$　……(答)



(**2**)　右下の図の網掛け部分の直角三角形を用いて



$\mathrm{Q}(\sqrt{3},\ c-1)$

2点PとQはy軸に関して対称であるから

$\mathrm{P}(-\sqrt{3},\ c-1)$

また，P，Qは放物線F上にあるから

$c-1=a(\pm\sqrt{3})^2$

より　$c=3a+1$　……①

よって

$\mathrm{P}(-\sqrt{3},\ 3a)$，$\mathrm{Q}(\sqrt{3},\ 3a)$，$\mathrm{A}(0,\ 3a+1)$　……(答)

一方

$y=ax^2 \quad (a>0)$　……②，$x^2+(y-c)^2=4$　……③

とおく。②と③からxを消去して

$$\frac{y}{a}+y^2-2cy+c^2=4$$

より

$$ay^2-(2ac-1)y+a(c^2-4)=0 \quad \cdots\cdots④$$

放物線Fと円Cが接するとき，yの2次方程式④は正の重解をもつから，判別式をDとして

$$D=0 \quad \text{かつ} \quad \frac{2ac-1}{2a}>0 \quad \cdots\cdots⑤$$

このとき

$$D=(2ac-1)^2-4a\cdot a(c^2-4)=16a^2-4ac+1$$

これと，①より，cを消去して⑤を整理すると

$$4a^2-4a+1=0 \quad \text{かつ} \quad 6a^2+2a-1>0$$

$4a^2-4a+1=0$より　$(2a-1)^2=0$

ゆえに　$a=\dfrac{1}{2}$

このとき，①より$c=\dfrac{5}{2}$であるから，$\dfrac{2ac-1}{2a}=\dfrac{3}{2}>0$となって⑤を満たす。

よって　　$a=\dfrac{1}{2}$　……(答)

(3)　①より，$c=3\times\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{5}{2}$ であるから，円 C の方程式は

$$x^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=4 \quad \cdots\cdots(答)$$

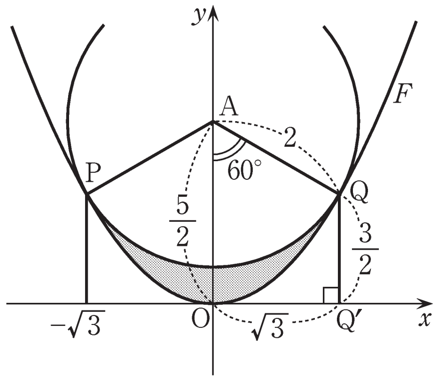
円 C 上の点で y 座標が 1 である点の x 座標は

$x^2+\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2=4$ より　　$x^2=\dfrac{7}{4}$

ゆえに　　$x=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

よって，求める座標は　　$\left(\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2},\ 1\right)$　……(答)

(4)　求める面積は，右図の網掛け部分の図形の面積である。この図形は y 軸に関して対称であるから，$x\geqq 0$ の部分の面積について考える。



今，点Qから x 軸に下ろした垂線の足を Q′ とすると，網掛け部分の面積のうち $x\geqq 0$ の部分の面積 $\dfrac{S}{2}$ は，台形 OAQQ′ から中心角 60°，半径 2 の扇形と，放物線 F，x 軸および線分 QQ′ で囲まれた面積を除いた部分の面積である。

このとき，右上の図から

$$\frac{S}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\right)\sqrt{3}-\frac{1}{6}\cdot 2^2\pi-\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{2}x^2dx$$

$$=2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi-\left[\frac{x^3}{6}\right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$$

よって　　$S=3\sqrt{3}-\dfrac{4}{3}\pi$　……(答)

III **解答** $f(x)=x^3-ax^2+5\tan\theta\cdot x-2\tan\theta$ ……① とおく。

与えられた条件から，$f(2)=0$ である。このとき，①に $x=2$ を代入して

$$8-4a+8\tan\theta=0 \qquad a=2\tan\theta+2 \quad \cdots\cdots②$$

(1)(i) $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，$\tan\dfrac{\pi}{4}=1$ である。よって，②から

$$a=4 \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

このとき　$f(x)=x^3-4x^2+5x-2$ ……③

③より　$f'(x)=3x^2-8x+5=(3x-5)(x-1)$

よって，$f'(x)=0$ を満たす x の値は　$x=1,\ x=\dfrac{5}{3}$ ……(答)

(ii) (i)の結果から，$f(x)$ の増減は右の表のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	$\dfrac{5}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

このとき

$$f(1)=0,\ f\left(\frac{5}{3}\right)=-\frac{4}{27}$$

よって

$$\text{極大値}\,0 \quad (x=1)，\text{極小値}-\frac{4}{27} \quad \left(x=\frac{5}{3}\right) \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

また，$f(2)=0$ であるから，$f(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。③より

$$f(x)=(x-2)(x^2-2x+1)=(x-2)(x-1)^2$$

よって，$f(x)=0$（ただし $x\neq2$）の解は　$x=1$ ……(答)

(2) ②より　$a=2\tan\theta+2$ ……(答)

②を①に代入して

$$f(x)=x^3-(2\tan\theta+2)x^2+5\tan\theta\cdot x-2\tan\theta$$

$f(x)$ は $x-2$ を因数にもつから

$$f(x)=(x-2)(x^2-2\tan\theta\cdot x+\tan\theta) \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(3) $f(x)=0$ が異なる3つの実数解，または異なる2つの実数解をもつ条件は

$$x^2-2\tan\theta\cdot x+\tan\theta=0 \quad \cdots\cdots④$$

が実数解をもち，かつ，$x=2$ を重解にもたないことである。

④の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=\tan^2\theta-\tan\theta=\tan\theta(\tan\theta-1)\geqq 0$$

ゆえに　　$\tan\theta\leqq 0$，$1\leqq\tan\theta$

これと，与えられた条件 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ により　　$\tan\theta\geqq 1$

$D=0$ のとき，$\tan\theta=1$ より $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ である。(1)(ii)の解答過程から，④が重解をもつのは $x=1$ のときである。したがって，④は $x=2$ を重解にもたない。

よって，$\tan\theta\geqq 1$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を満たす θ の値の範囲を求めて

$$\frac{\pi}{4}\leqq\theta<\frac{\pi}{2}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$