数　学

Ⅰ 解答

$$f(x)=-x^2+2x+9$$
$$=-(x-1)^2+10 \quad (2k-5\leqq x\leqq k)$$

(1)　$k=\dfrac{5}{2}$ のとき，$f(x)=-(x-1)^2+10\ \left(0\leqq x\leqq\dfrac{5}{2}\right)$ より

$$M=f(1)=10,\quad m=f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{31}{4}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　(i) $k\leqq1$ のとき

$$M=f(k)=-k^2+2k+9$$

よって，$M\geqq7$ となるとき

$$-k^2+2k+9\geqq7$$
$$k^2-2k-2\leqq0\qquad\therefore\quad 1-\sqrt{3}\leqq k\leqq1+\sqrt{3}$$

$k\leqq1$ より

$$1-\sqrt{3}\leqq k\leqq1$$

(ii) $2k-5\leqq1<k$ すなわち $1<k\leqq3$ のとき

$M=f(1)=10$ より，$M\geqq7$ を満たす。

(iii) $1<2k-5$ かつ $k<5$ すなわち $3<k<5$ のとき

$$M=f(2k-5)=-(2k-6)^2+10=-4(k-3)^2+10$$

よって，$M\geqq7$ となるとき

$$-4(k-3)^2+10\geqq7$$
$$(k-3)^2\leqq\frac{3}{4}$$
$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq k-3\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}\qquad\therefore\quad 3-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq k\leqq3+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$3<k<5$ より

$$3<k\leqq3+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

以上(i)〜(iii)より，求める k の範囲は

$$1-\sqrt{3} \leqq k \leqq 3+\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(3)　区間 $2k-5 \leqq x \leqq k$ の中央値は $\dfrac{(2k-5)+k}{2}=\dfrac{3k-5}{2}$ である。

$\dfrac{3k-5}{2}<1$ すなわち $k<\dfrac{7}{3}$ のとき

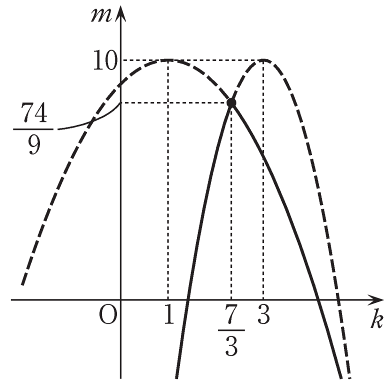
$$m=f(2k-5)=-4(k-3)^2+10$$

$\dfrac{3k-5}{2} \geqq 1$ すなわち $k \geqq \dfrac{7}{3}$ のとき

$$m=f(k)=-(k-1)^2+10$$

よって，m のグラフは右図のようになるから，m は $k=\dfrac{7}{3}$ のとき，最大値 $\dfrac{74}{9}$ である。

……(答)



II 解答

(1)　A，B，Cの3人を松の部屋に入れるとき，残り10人の部屋への入れ方は

$${}_{10}C_2 \times {}_8C_4 \times {}_4C_4=\frac{10\cdot 9}{2\cdot 1}\times\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\times 1=3150 \text{ 通り}$$

A，B，Cの3人を竹または梅の部屋に入れるとき，残り10人の部屋への入れ方は

$${}_{10}C_5 \times {}_5C_1 \times {}_4C_4 \times 2=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\times 5\times 1\times 2=2520 \text{ 通り}$$

よって，求める場合の数は

$$3150+2520=5670 \text{ 通り} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　A，Bを松，Cを竹または梅の部屋に入れるとき，残り10人の部屋への入れ方は

$${}_{10}C_3 \times {}_7C_3 \times {}_4C_4=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}\times\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}\times 1=4200 \text{ 通り}$$

A，Bを竹または梅，Cを松の部屋に入れるとき，残り10人の部屋への入れ方は

$${}_{10}C_4 \times {}_6C_2 \times {}_4C_4=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\times\frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}\times 1=3150 \text{ 通り}$$

A，Bを竹，Cを梅の部屋，またはA，Bを梅，Cを竹の部屋に入れるとき，残り10人の部屋への入れ方は

$${}_{10}C_5\times{}_5C_2\times{}_3C_3=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}\times\frac{5\cdot4}{2\cdot1}\times1=2520\text{ 通り}$$

A，B，Cの3人を2人と1人の組に分ける分け方は

${}_3C_2=3$ 通り

よって，求める場合の数は

$(4200\times2+3150\times2+2520\times2)\times3=59220$ 通り　……(答)

III　解答

A$(1,\ 3,\ 0)$，B$(0,\ 3,\ 4)$，C$(2,\ 1,\ 2)$ より

$$|\overrightarrow{OA}|^2=1^2+3^2+0^2=10$$
$$|\overrightarrow{OB}|^2=0^2+3^2+4^2=25$$
$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1\cdot0+3\cdot3+0\cdot4=9$$
$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=1\cdot2+3\cdot1+0\cdot2=5$$
$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=0\cdot2+3\cdot1+4\cdot2=11$$

(1)

$$\triangle OAB=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{10\cdot25-9^2}$$
$$=\frac{13}{2}\quad\cdots\cdots\text{(答)}$$

(2) 点Pは平面α上の点であるので，s，tを実数として

$$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$$

とおける。

$CP\perp\alpha$であるとき

$CP\perp OA$，$CP\perp OB$

よって，$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{OA}=0$ より

$$(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OA}=0$$
$$(s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OA}=0\qquad\therefore\quad 10s+9t-5=0\quad\cdots\cdots①$$

また，$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ より

$$(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OB}=0$$
$$(s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OB}=0\qquad\therefore\quad 9s+25t-11=0\quad\cdots\cdots②$$

①，②を解くと

$$s=\frac{2}{13},\quad t=\frac{5}{13}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2}{13}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{5}{13}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{2}{13}(1,\ 3,\ 0)+\frac{5}{13}(0,\ 3,\ 4)$$
$$=\left(\frac{2}{13},\ \frac{21}{13},\ \frac{20}{13}\right)$$

より

$$\mathrm{P}\left(\frac{2}{13},\ \frac{21}{13},\ \frac{20}{13}\right)\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

(3) (2)より

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left(\frac{2}{13},\ \frac{21}{13},\ \frac{20}{13}\right)-(2,\ 1,\ 2)=\left(-\frac{24}{13},\ \frac{8}{13},\ -\frac{6}{13}\right)$$

よって

$$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=\left|\frac{2}{13}(-12,\ 4,\ -3)\right|=\frac{2}{13}\sqrt{(-12)^2+4^2+(-3)^2}=2$$

したがって，求める体積は

$$\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OAB}\times|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=\frac{1}{3}\times\frac{13}{2}\times2=\frac{13}{3}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$