数　学

Ⅰ 解答

$$(\log_2 x)^2 = \log_2(\sqrt{b}\,x^a) \quad \cdots\cdots(*)$$

(1) $a=1$, $b=16$ のとき

(＊)より

$$(\log_2 x)^2 = \log_2(4x)$$
$$(\log_2 x)^2 = \log_2 4 + \log_2 x$$
$$(\log_2 x)^2 - \log_2 x - 2 = 0$$
$$(\log_2 x + 1)(\log_2 x - 2) = 0$$
$$\log_2 x = -1,\ 2 \qquad \therefore \quad x = \frac{1}{2},\ 4 \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) (＊)より

$$(\log_2 x)^2 = \frac{1}{2}\log_2 b + a\log_2 x$$

(＊)は $x = 2\sqrt{2} = 2^{\frac{3}{2}}$ を解にもつので

$$(\log_2 2^{\frac{3}{2}})^2 = \frac{1}{2}\log_2 b + a\log_2 2^{\frac{3}{2}}$$
$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\log_2 b + \frac{3}{2}a$$
$$\log_2 b = \frac{9}{2} - 3a \quad \cdots\cdots①$$

また，(＊)は $x = \frac{b}{4}$ を解にもつので

$$\left(\log_2 \frac{b}{4}\right)^2 = \frac{1}{2}\log_2 b + a\log_2 \frac{b}{4}$$
$$(\log_2 b - 2)^2 = \frac{1}{2}\log_2 b + a(\log_2 b - 2)$$

①より

$$\left(\frac{9}{2}-3a-2\right)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}-3a\right)+a\left(\frac{9}{2}-3a-2\right)$$

整理すると

$$3a^2-4a+1=0$$

$$(3a-1)(a-1)=0 \qquad \therefore \quad a=\frac{1}{3},\ 1$$

(i) $a=\dfrac{1}{3}$ のとき

①より

$$\log_2 b=\frac{7}{2} \qquad \therefore \quad b=2^{\frac{7}{2}}=8\sqrt{2}$$

このとき，(＊)の解は $(\log_2 x)^2=\dfrac{7}{4}+\dfrac{1}{3}\log_2 x$ より

$$12(\log_2 x)^2-4\log_2 x-21=0$$

$$(2\log_2 x-3)(6\log_2 x+7)=0$$

$$\log_2 x=\frac{3}{2},\ -\frac{7}{6} \qquad \therefore \quad x=2^{\frac{3}{2}},\ 2^{-\frac{7}{6}}$$

となるが，$\dfrac{b}{4}=\dfrac{8\sqrt{2}}{4}=2\sqrt{2}$ より $2\sqrt{2}$ と $\dfrac{b}{4}$ 以外の解をもつので不適。

(ii) $a=1$ のとき

①より

$$\log_2 b=\frac{3}{2} \qquad \therefore \quad b=2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}$$

このとき，(＊)の解は $(\log_2 x)^2=\dfrac{3}{4}+\log_2 x$ より

$$4(\log_2 x)^2-4\log_2 x-3=0$$

$$(2\log_2 x-3)(2\log_2 x+1)=0$$

$$\log_2 x=\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2} \qquad \therefore \quad x=2^{\frac{3}{2}},\ 2^{-\frac{1}{2}}=2\sqrt{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}$$

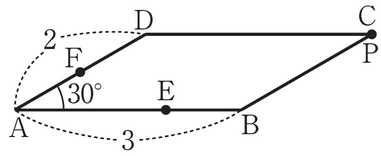
$\dfrac{b}{4}=\dfrac{2\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ であるので，条件を満たす。

以上より

$$a=1,\ b=2\sqrt{2} \quad \cdots\cdots(答)$$

Ⅱ 解答

(1) $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$



$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cos 30^\circ$$

$$=3\cdot2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$$

より

$$k=\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EP}$$

$$=(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE})\cdot(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AE})$$

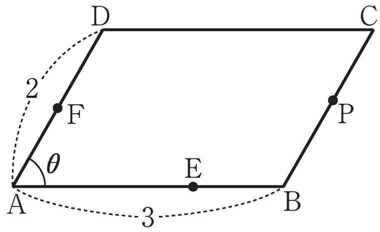
$$=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$$

$$=-\frac{2}{9}|\overrightarrow{AB}|^2-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}|\overrightarrow{AD}|^2$$

$$=-\frac{2}{9}\cdot3^2-\frac{1}{2}\cdot3\sqrt{3}+\frac{1}{2}\cdot2^2=-\frac{3}{2}\sqrt{3}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

(2) $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AD}$ ($0\leqq t\leqq1$) とおくと



$$k=\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EP}$$

$$=(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE})\cdot(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AE})$$

$$=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AD}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\frac{2}{9}|\overrightarrow{AB}|^2\right)+t\left(\frac{1}{2}|\overrightarrow{AD}|^2-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{6}\cdot3\cdot2\cos\theta-\frac{2}{9}\cdot3^2\right)+t\left(\frac{1}{2}\cdot2^2-\frac{2}{3}\cdot3\cdot2\cos\theta\right)$$

$$=(\cos\theta-2)+t(2-4\cos\theta)$$

これが，$0\leqq t\leqq1$ を満たす任意の t に対して一定の値をとるのは

$$2-4\cos\theta=0$$

$$\cos\theta=\frac{1}{2}$$

のとき。よって，$0^\circ<\theta<180^\circ$ より

$\theta=60^\circ$　……(答)

このとき

$k=-\dfrac{3}{2}$　……(答)

(3)　$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AD}$　$(0\leqq t\leqq 1)$　とおくと

$BP:PC=t:(1-t)$

EF＝EP より

$|\overrightarrow{EF}|^2=|\overrightarrow{EP}|^2$

$$\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right|^2=\left|\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AD}\right|^2$$

$$\frac{1}{4}|\overrightarrow{AD}|^2-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{4}{9}|\overrightarrow{AB}|^2=\frac{1}{9}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{2}{3}t\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+t^2|\overrightarrow{AD}|^2$$

$|\overrightarrow{AB}|=3$，$|\overrightarrow{AD}|=2$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=6\cos\theta$ を代入して整理すると

$t^2+(t+1)\cos\theta-1=0$　……①

$k=-1$ より

$(\cos\theta-2)+t(2-4\cos\theta)=-1$

$(4t-1)\cos\theta=2t-1$

$t=\dfrac{1}{4}$ はこの式を満たさないので

$t\neq\dfrac{1}{4}$　　∴　$\cos\theta=\dfrac{2t-1}{4t-1}$

よって，①より

$$t^2+(t+1)\cdot\frac{2t-1}{4t-1}-1=0$$

整理すると

$t(t+1)(4t-3)=0$

$0\leqq t\leqq 1$ より，$t=0$，$\dfrac{3}{4}$ であるが，①で $t=0$ とすると，$\cos\theta=1$ より $\theta=0^\circ$ となり，$0^\circ<\theta<180^\circ$ に反するので，$t=\dfrac{3}{4}$ である。

ゆえに

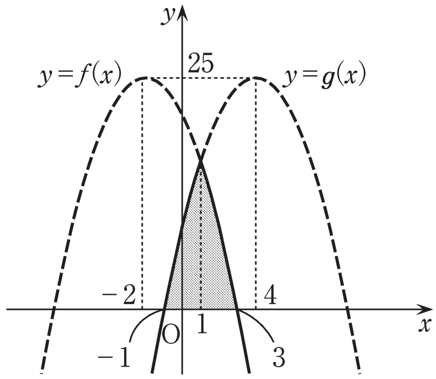
$BP:PC=\dfrac{3}{4}:\dfrac{1}{4}=3:1$　……(答)

Ⅲ 解答

$f(x)=-x^2-4x+a=-(x+2)^2+4+a$

$g(x)=-x^2+8x+9=-(x-4)^2+25$

(1)　$a=21$ のとき



$f(x)=0$ とすると

$$-x^2-4x+21=0$$

$$(x+7)(x-3)=0 \qquad \therefore \quad x=-7,\ 3$$

$g(x)=0$ とすると

$$-x^2+8x+9=0$$

$$(x+1)(x-9)=0 \qquad \therefore \quad x=-1,\ 9$$

$f(x)=g(x)$ とすると

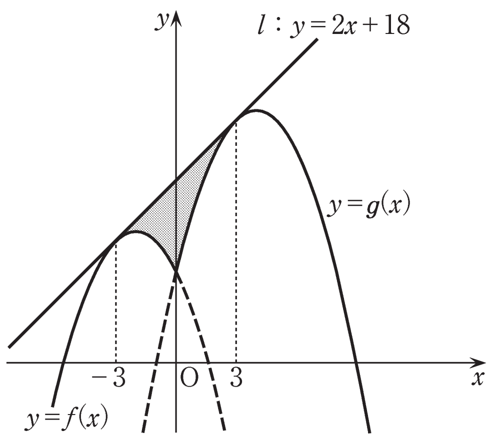
$$-x^2-4x+21=-x^2+8x+9 \qquad \therefore \quad x=1$$

よって，求める面積を S とすると

$$S=\int_{-1}^{1}(-x^2+8x+9)\,dx+\int_{1}^{3}(-x^2-4x+21)\,dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+4x^2+9x\right]_{-1}^{1}+\left[-\frac{x^3}{3}-2x^2+21x\right]_{1}^{3}=\frac{104}{3} \quad \cdots\cdots(答)$$

(2)　$g'(x)=-2x+8$ より，$g'(x)=2$ とすると



$$-2x+8=2 \qquad \therefore \quad x=3$$

よって，$g(3)=24$ より

$$l : y-24=2(x-3)$$

すなわち

$$y=2x+18$$

また，$f'(x)=-2x-4$ より，$f'(x)=2$ とすると

$$-2x-4=2 \qquad \therefore \quad x=-3$$

l と $y=f(x)$ は $x=-3$ で接するので

$$f(-3)=2(-3)+18$$

$$3+a=12 \qquad \therefore \quad a=9 \quad \cdots\cdots(答)$$

このとき，$f(x)=g(x)$ とすると

$$-x^2-4x+9=-x^2+8x+9 \qquad \therefore \quad x=0$$

よって，求める面積を T とすると

$$T=\int_{-3}^{0}\{(2x+18)-(-x^2-4x+9)\}\,dx+\int_{0}^{3}\{(2x+18)$$

$$-(-x^2+8x+9)\}\,dx$$

$$=\int_{-3}^{0}(x+3)^2dx+\int_{0}^{3}(x-3)^2dx=\left[\frac{1}{3}(x+3)^3\right]_{-3}^{0}+\left[\frac{1}{3}(x-3)^3\right]_{0}^{3}$$

$=18$ ……(答)