

数 学

1

解答

(1) $-32x^{15}$ (2) $\frac{9+\sqrt{5}}{4}$ (3) $y=2(x-5)^2+1$

(4) $k < \frac{3-\sqrt{13}}{2}$, $k > \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ (5) $a=13$ (6) $\sin\theta = \frac{1}{2}$, $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$

(7) $\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20\}$ (8) 30 人

(9) $AB=12$

2

解答

(1) 3桁の自然数で、各位の和が3になる自然数は次の(ア)~(ウ)のいずれかの場合であり、それらは互いに排反である。

(ア)各位の数が0, 0, 3のとき

これは300のみの1個。

(イ)各位の数が0, 1, 2のとき

このとき $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ 個

(ウ)各位の数が1, 1, 1のとき

これは111のみの1個。

(ア)~(ウ)より

$1+4+1=6$ 個 ……(答)

(2) 3桁の自然数で、各位の和が5になる自然数は次の(エ)~(カ)のいずれかの場合であり、それらは互いに排反である。

(エ)各位の数が0, 0, 5のとき

これは500のみの1個。

(オ)各位の数が0, 1, 4または0, 2, 3のとき

このとき $(2 \cdot 2 \cdot 1) \cdot 2 = 8$ 個

(カ)各位の数が1, 1, 3または1, 2, 2のとき

このとき $\frac{3!}{2!} \cdot 2 = 6$ 個

(エ)~(カ)より

$1 + 8 + 6 = 15$ 個 ……(答)

(3) 3桁の自然数で、各位の和が9になる自然数は次の(キ)~(サ)のいずれかの場合であり、それらは互いに排反である。

(キ)各位の数が0, 0, 9のとき

これは900のみの1個。

(ク)各位の数が0, 1, 8または0, 2, 7または0, 3, 6または0, 4, 5のとき

このとき $(2 \cdot 2 \cdot 1) \cdot 4 = 16$ 個

(ケ)各位の数が1, 1, 7または1, 4, 4または2, 2, 5のとき

このとき $\frac{3!}{2!} \cdot 3 = 9$ 個

(コ)各位の数が1, 2, 6または1, 3, 5または2, 3, 4のとき

このとき $3! \cdot 3 = 18$ 個

(サ)各位の数が3, 3, 3のとき

これは333のみの1個。

(キ)~(サ)より

$1 + 16 + 9 + 18 + 1 = 45$ 個 ……(答)

別解 3桁の数の百の位の数を x , 十の位の数を y , 一の位の数を z とする。

また、 $X = x + 1$ とすると、 $X \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ であり、 X 1つに対し x は1つ決まる。

$$(1) \quad x + y + z = 3 \iff X + y + z = 2$$

これを満たす0以上の整数 X , y , z の組は $\bigcirc \bigcirc \mid \mid$ の並べ替えの総数と同じなので

$$\frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 6 \text{ 個}$$

$$(2) \quad x+y+z=5 \iff X+y+z=4$$

これを満たす 0 以上の整数 X, y, z の組は $\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc \mid \mid$ の並べ替えの総数と同じなので

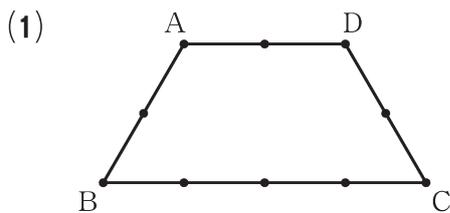
$$\frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 15 \text{ 個}$$

$$(3) \quad x+y+z=9 \iff X+y+z=8$$

これを満たす 0 以上の整数 X, y, z の組は $\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc \mid \mid$ の並べ替えの総数と同じなので

$$\frac{10!}{8!2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 45 \text{ 個}$$

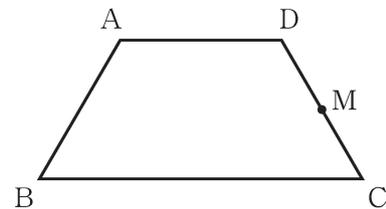
3 解答



条件より、バスの停留所は上図の黒丸の部分の 10 カ所。……(答)

(2) 求める停留所は、右図の線分 CD の中点 M である。

また、 $\triangle EDM$ は 30° 定規の形より、求める距離は



$$EM = (2-1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ [km]} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(3) 条件より $40 \cdot 10 + 80 = 480$ [秒]

よって 8 分 ……(答)

(4)(i) $40 \cdot 2 = 80$ [秒] より 10 時 1 分 20 秒 ……(答)

(ii) $40 \cdot 6 = 240$ [秒] より 10 時 4 分 ……(答)

(5) 予定の 15 分後のバスが停留所 F を通る時刻は $40 \cdot 3 = 120$ [秒] より、10 時 17 分。

$\triangle ABF$ は 30° 定規の形より

$$AF = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ [km]}$$

吉野さんは AF 間を $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1000 = 5\sqrt{3}$ [分] で移動する。

ここで、 $5\sqrt{3} < 5 \cdot 2 = 10$ より、吉野さんは停留所 F に 10 時 15 分より早く着く。

よって、吉野さんは、予定の 15 分後のバスに間に合う。……(答)