数　　学 (2)

（解答番号 $\boxed{1}$ ～ $\boxed{59}$ ）

解答上の注意：以下の説明をよく読んでから解答してください。

1　問題の文中の空欄 $\boxed{}$ には，数字（0～9）が入ります。なお，$\boxed{}\boxed{}$ のように2つ以上の空欄が続くところは次のような意味を表します。例えば，$\boxed{}\boxed{}\boxed{}$ は3桁（けた）以下の整数値を表します。この場合，答えが2桁以下の値であれば，不要な上位の空欄 $\boxed{}$ については解答欄に⓪をマークしてください。

例　3つ続いた空欄 $\boxed{}\boxed{}\boxed{}$ のところが42になる場合は，左から順番に⓪，④，②と解答欄にマークしてください。

2　問題の文中の2重線で表された空欄 $\boxed{\boxed{}}$ には，記号などが入ります。文中の指示にしたがって，当てはまる記号などに対応する番号をマークしてください。

3　分数の形で解答する場合は，既約分数(それ以上約分できない分数)で答えてください。ただし，数字を入れる空欄が分数の形となっている場合でも，解答の値は必ずしも分数であるとは限りません(整数となる場合もあります)。このような場合は，分母の値が1になるように答えてください。

4　根号を含む形で解答する場合は，根号の中が最小の正の整数となるように答えてください。

※　この問題つづりに計算用紙をはさみこんでいますので利用してください。

$\boxed{\mathrm{I}}$ **解答番号** $\boxed{1}$ ～ $\boxed{12}$

次の記述の空欄 $\boxed{}$ にあてはまる数字を答えよ。 (30点)

四面体OABCが，$OA = OB = OC = 3\sqrt{2}$，$\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 90^\circ$ をみたす。辺ABの中点をM，辺BCを1：2に内分する点をNとする。

このとき，

(1) $OM = \boxed{1}$，$\angle ABC = \boxed{2}\boxed{3}^\circ$ である。

(2) $ON = \sqrt{\boxed{4}\boxed{5}}$，$MN = \sqrt{\boxed{6}}$ である。

(3) $\cos\angle MON = \dfrac{\sqrt{\boxed{7}\boxed{8}}}{\boxed{9}}$ である。

(4) △MONの面積は $\dfrac{\boxed{10}\sqrt{\boxed{11}}}{\boxed{12}}$ である。

$\boxed{\text{II}}$ **解答番号** $\boxed{13}$ ～ $\boxed{39}$

次の記述の空欄 $\boxed{}$ について，解答群の中から最も適当な番号を１つずつ選べ。ただし $\boxed{30}$ は，数学的帰納法の証明として正しくなるように解答を選ぶこと。また空欄 $\boxed{}$ は，あてはまる数字を答えよ。　(30点)

問１　$a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n+\dfrac{1}{3}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求める。

$$a_{n+1}\boxed{13}\frac{\boxed{14}}{\boxed{15}}=2\left(a_n\boxed{13}\frac{\boxed{14}}{\boxed{15}}\right)$$

なので，数列 $\left\{a_n\boxed{13}\dfrac{\boxed{14}}{\boxed{15}}\right\}$ は初項 $\boxed{16}\dfrac{\boxed{17}}{\boxed{18}}$，

$\boxed{19}\boxed{20}\boxed{21}$ の $\boxed{22}$ 数列である。よって，

$$a_n=\boxed{23}\frac{\boxed{24}}{\boxed{25}}\boxed{26}\boxed{27}\frac{\boxed{28}}{\boxed{29}}$$

である。

問２　$b_1=1,\ b_{n+1}=\dfrac{3b_n}{b_n+6}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

によって定められる数列 $\{b_n\}$ の一般項を求める。

まず，すべての自然数 n について $b_n>0$ であることを，数学的帰納法によって証明する。

［1］ $n=1$ のとき，$b_1>0$ である。

［2］ $n=k$ のとき，$b_k>0$ が成り立つと仮定すると，

$n=\boxed{30}$ のとき，$b_k>0$ と漸化式より $b_{\boxed{30}}>0$ である。

［1］，［2］から，すべての自然数 n について，$b_n>0$ が成り立つ。

よって，

$$\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{\boxed{31}}{b_n}+\frac{\boxed{32}}{\boxed{33}}$$

とでき，

$$b_n = \frac{\boxed{34}}{\boxed{35}\ \boxed{36}\ \boxed{37}\ \boxed{38}\ \boxed{39}}$$

である。

$\boxed{13}$，$\boxed{16}$，$\boxed{20}$，$\boxed{23}$，$\boxed{27}$，$\boxed{35}$，$\boxed{38}$ の解答群

① $+$　② $-$

$\boxed{19}$ の解答群

① 公差　② 公比

$\boxed{22}$ の解答群

① 等差　② 等比

$\boxed{26}$，$\boxed{37}$ の解答群

① n　② 2^{n-1}　③ 3^{n-1}　④ $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

⑤ $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$　⑥ $(-1)^{n-1}$　⑦ $(-2)^{n-1}$　⑧ $(-3)^{n-1}$

⑨ $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$　⓪ $\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\boxed{30}$ の解答群

① 1　② 2　③ $k-1$　④ k

⑤ $k+1$

Ⅲ　**解答番号 $\boxed{40}$ 〜 $\boxed{59}$**

次の記述の空欄 $\boxed{}$ について，解答群の中から最も適当な番号を１つずつ選べ。また空欄 $\boxed{}$ は，あてはまる数字を答えよ。（40点）

$0 \leqq \theta < 2\pi$ において

$$\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{3}\sin\theta\cos\theta \quad \cdots\cdots ①$$

をみたす θ の個数を求める。

(1)　①より，$3\sin^2\theta\cos^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta\ \boxed{40}\ \boxed{41} = 0$

である。

(2)　$\sin\theta\cos\theta = \dfrac{\boxed{42}}{\boxed{43}}\sin 2\theta$

なので，①をみたす θ が存在する場合

$$\sin\theta\cos\theta = \boxed{44}\ \frac{\boxed{45}}{\boxed{46}}$$

$$\sin\theta + \cos\theta = \boxed{47}\ \frac{\sqrt{\boxed{48}}}{\boxed{49}}$$

である。

(3)　①をみたす θ が存在する場合，$\sin\theta$，$\cos\theta$ は，２次方程式

$$x^2 \boxed{50} \frac{\sqrt{\boxed{48}}}{\boxed{49}} x \boxed{51} \frac{\boxed{45}}{\boxed{46}} = 0$$

の実数解である。この方程式の解

$$x = \frac{\boxed{52}\sqrt{\boxed{53}} \pm \sqrt{\boxed{54}\,\boxed{55}}}{\boxed{56}}$$

は，

$$\frac{\boxed{52}\sqrt{\boxed{53}} + \sqrt{\boxed{54}\,\boxed{55}}}{\boxed{56}} \boxed{57} 1$$

$$\frac{\boxed{52}\sqrt{\boxed{53}} - \sqrt{\boxed{54}\,\boxed{55}}}{\boxed{56}} \boxed{58} -1$$

をみたす。

(4)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ において，①をみたす θ は $\boxed{59}$ 個ある。

$\boxed{40}$，$\boxed{44}$，$\boxed{47}$，$\boxed{50}$，$\boxed{51}$，$\boxed{52}$ の解答群

①　$+$　　　②　$-$

$\boxed{57}$，$\boxed{58}$ の解答群

①　$<$　　　②　$>$