2024年度 一般選抜 Ⅱ日程

数　学

Ⅰ 解答

(1) 1 ―① 2 ―⑦ (2) 3 ―② 4 ―②
(3) 5 ―④ 6 ―②
(4) 7 ―② 8 ―② 9 ―② 10―② (5) 11―① 12―②

解説

《2次関数，恒等式，軌跡》

(1) $f(x)=(x+m)^2-m^2+4m-2$ と変形できるので，$f(x)$ は $x=-m$ で最小値 $-m^2+4m-2$ をとる。

したがって　$-m=1$　$m=-1$　→1

そのときの最小値は

$$f(1)=-m^2+4m-2=-7 \quad \to 2$$

(2) $y=x^2+2mx+4m-2$ を m で整理すると

$$m(2x+4)+(x^2-y-2)=0$$

この式が m の値によらず成り立つのは

$$\begin{cases} 2x+4=0 \\ x^2-y-2=0 \end{cases}$$

のときである。これを解くと　$(x,\ y)=(-2,\ 2)$

これは $y=f(x)$ のグラフが m の値によらず点 $(-2,\ 2)$ を通ることを表す。 →3，4

(3) (1)より，$y=f(x)$ のグラフの頂点は，点 $(-m,\ -m^2+4m-2)$ であるから

$$\begin{cases} X=-m \\ Y=-m^2+4m-2 \end{cases}$$

とおくと，2式から m を消去して

$$Y=-(-X)^2+4(-X)-2 \qquad Y=-X^2-4X-2$$

これは，グラフの頂点が $y=-x^2-4x-2$ 上にあることを表す。

→5，6

(4)　$y=f(x)$ のグラフは下に凸であるから，グラフが x 軸と交わらないのは，頂点の y 座標 $-m^2+4m-2$ が正のときである。したがって

$-m^2+4m-2>0$　　$m^2-4m+2<0$

$2-\sqrt{2}<m<2+\sqrt{2}$　→7～10

別解　2次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D として $D<0$ となるときである。

$$\frac{D}{4}=m^2-(4m-2)=m^2-4m+2$$

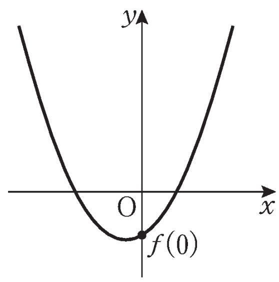
から

$m^2-4m+2<0$

$2-\sqrt{2}<m<2+\sqrt{2}$

(5)　条件を満たすのは，$y=f(x)$ のグラフが x 軸の正の部分と負の部分で交わるときである。これは $f(0)<0$ となるときであるから

$4m-2<0$　　$\therefore$　$m<\dfrac{1}{2}$　→11，12



Ⅱ　解答

(1) **13**―⑥　**14**―③　**15**―⑦　**16**―⑧　**17**―⑧　**18**―⑦　**19**―⑦

(2) **20**―⑤　**21**―⑦　**22・23**―①・⑥　**24**―⑤　**25**―⑤　**26**―④　**27・28**―⑦・⑤　**29**―⑦　**30・31**―⑥・④

解説

《正弦定理・余弦定理，三角形の面積》

(1)　余弦定理より

$$\mathrm{BC}^2=4^2+5^2-2\cdot4\cdot5\cdot\cos\angle\mathrm{BAC}$$
$$=41-40\cdot\frac{1}{8}=36$$

$\mathrm{BC}>0$ より　　$\mathrm{BC}=6$　→13

$\sin\angle\mathrm{BAC}>0$ より

$$\sin\angle\mathrm{BAC}=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{BAC}}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{63}{64}}=\frac{3\sqrt{7}}{8} \quad \to 14\sim16$$

　△ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理から

$$2R=\frac{6}{\sin\angle\mathrm{BAC}}$$

$$R=3\div\left(\frac{3\sqrt{7}}{8}\right)=\frac{8\sqrt{7}}{7} \quad \to 17\sim19$$

(2)　余弦定理より

$$\cos\angle\mathrm{ABC}=\frac{4^2+6^2-5^2}{2\cdot4\cdot6}=\frac{9}{16}$$

であるから

$$\sin\angle\mathrm{ABC}=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{ABC}}$$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{9}{16}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{175}{256}}=\frac{5\sqrt{7}}{16} \quad \to 20\sim23$$

　△BCD の外接円の半径も $R=\frac{8\sqrt{7}}{7}$ であることに注意して，正弦定理から

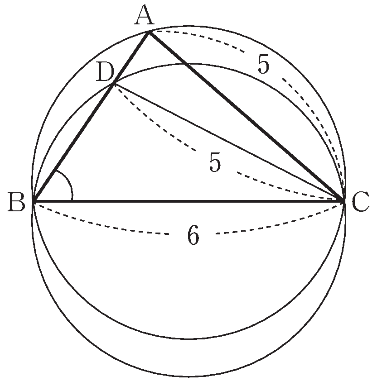
$$2R=\frac{\mathrm{CD}}{\sin\angle\mathrm{ABC}}$$

　よって

$$\mathrm{CD}=2R\sin\angle\mathrm{ABC}$$

$$=2\cdot\frac{8\sqrt{7}}{7}\cdot\frac{5\sqrt{7}}{16}=5 \quad \to 24$$

　また，AD$=x$ として △ADC において余弦定理から



$$5^2=5^2+x^2-2\cdot5\cdot x\cdot\frac{1}{8}$$

$$x^2-\frac{5}{4}x=0$$

　$x>0$ より　　$x=\frac{5}{4}$

$\therefore \quad AD=\dfrac{5}{4} \quad \to 25,\ 26$

したがって，△ADC の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot 5\cdot\sin\angle BAC=\frac{25}{8}\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8}$$

$$=\frac{75\sqrt{7}}{64} \quad \to 27\sim 31$$

Ⅲ 解答

32—② **33**—③ **34**—⑤ **35**—③ **36・37**—①・④
38・39—①・⑩ **40**—⑤ **41**—⑤ **42**—②　**43**—②

解説

《円と直線の位置関係，三角形の面積の最大値》

円 K の方程式を変形して

$$(x+2)^2-4+(y-3)^2-9+8=0$$

$$(x+2)^2+(y-3)^2=5$$

より，中心 C の座標は $(-2,\ 3)$，円 K の半径は $\sqrt{5}$ である。 $\to 32\sim 34$

次に直線 AB の傾きは $\dfrac{6-8}{4-(-2)}=-\dfrac{1}{3}$ であるから，AB に垂直な直線 l の傾きは 3 である。l は点 A を通るので，その方程式は

$$y-8=3\{x-(-2)\}$$

$\therefore \quad y=3x+14 \quad \to 35\sim 37$

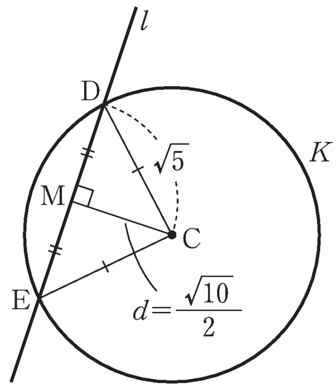
l と円 K の中心 $C(-2,\ 3)$ との距離 d について l の方程式は

$$3x-y+14=0$$

であるから

$$d=\frac{|3\cdot(-2)-3+14|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{|5|}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$



線分 DE の中点を M として，$CM=d$，$CD=\sqrt{5}$，$\angle CMD=90°$ より

$$DM=\sqrt{(\sqrt{5})^2-d^2}=\sqrt{5-\frac{5}{2}}$$

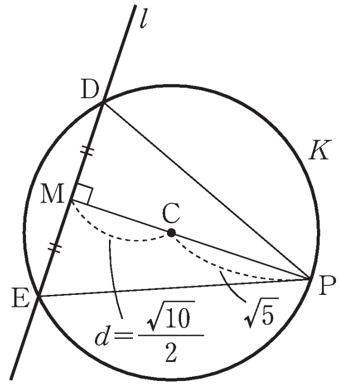
$$=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

よって　　$\mathrm{DE}=2\mathrm{DM}=\sqrt{10}$　→ 38，39

次に，△PDE の面積が最大となるのは，点 P と直線 l との距離 h が最大となるときで，これは

$$h=d+(\text{円 } K \text{ の半径})$$
$$=\frac{\sqrt{10}}{2}+\sqrt{5}$$

のときである。よって，△PDE の面積の最大値は



$$\frac{1}{2}\cdot\mathrm{DE}\cdot h=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{10}\cdot\left(\frac{\sqrt{10}}{2}+\sqrt{5}\right)$$
$$=\frac{5+5\sqrt{2}}{2}\quad\to 40\sim43$$

Ⅳ　解答

44—②　**45**—①　**46**—②　**47**—⑩　**48**—⑧　**49**—②
50・51—①・②

解説

《3次方程式，解と係数の関係，式の値》

$P(1)=0$ より

$$1+(p-1)+p+q=0$$

∴　$q=-2p$　→ 44

このとき，因数定理から $P(x)$ は $(x-1)$ を因数にもつことを用いて因数分解すると

$$P(x)=x^3+(p-1)x^2+px-2p$$
$$=(x-1)(x^2+px+2p)\quad\to 45,\ 46$$

$P(x)=0$ が虚数解をもつのは，$x^2+px+2p=0$ が虚数解をもつとき，すなわち，この判別式を D として $D<0$ となるときである。

$$D=p^2-4\cdot2p=p(p-8)$$

より　　$p(p-8)<0$

∴　$0<p<8$　→ 47，48

このときの虚数解 α，β について，解と係数の関係から

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-p & \cdots\cdots① \\ \alpha\beta=2p & \cdots\cdots② \end{cases}$$

$\alpha^2=2\beta$ が成り立つとき，$\beta=\dfrac{1}{2}\alpha^2$ であるから①，②に代入して

$$\begin{cases} \alpha+\dfrac{1}{2}\alpha^2=-p & \cdots\cdots③ \\ \dfrac{1}{2}\alpha^3=2p & \cdots\cdots④ \end{cases}$$

③，④から p を消去して

$$\frac{1}{2}\alpha^3=-2\left(\alpha+\frac{1}{2}\alpha^2\right)$$

$$\alpha^3+2\alpha^2+4\alpha=0 \qquad \alpha(\alpha^2+2\alpha+4)=0$$

α は虚数なので，$\alpha\neq0$ であるから　　$\alpha^2+2\alpha+4=0$

したがって，$\alpha^2=-2\alpha-4$ であるから，③より

$$p=-\frac{1}{2}\alpha^2-\alpha$$

$$=-\frac{1}{2}(-2\alpha-4)-\alpha=2 \quad \to 49$$

$\boxed{参考}$　p を求めるところは，$\alpha^2+2\alpha+4=0$ を解いて $\alpha=-1\pm\sqrt{3}\,i$（i は虚数単位）を求めて，③または④に代入してもよい（いずれの値を代入しても $p=2$ を得る）。

このとき，①，②より

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-2 & \cdots\cdots⑤ \\ \alpha\beta=4 & \cdots\cdots⑥ \end{cases}$$

であるから

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$

$$=(-2)^2-2\cdot4=-4$$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

$$=(-2)^3-3\cdot4\cdot(-2)=16$$

を用いて

$$\alpha^3+\alpha^2+\beta^3+\beta^2=-4+16$$

$=12 \quad \to 50,\ 51$

参考 $p=2$ のとき，$P(x)=x^3+x^2+2x-4$ であり，$P(\alpha)=P(\beta)=0$ であるから

$$\begin{cases} \alpha^3+\alpha^2+2\alpha-4=0 \\ \beta^3+\beta^2+2\beta-4=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha^3+\alpha^2=-2\alpha+4 \\ \beta^3+\beta^2=-2\beta+4 \end{cases}$$

これを用いて

$$\begin{aligned} \alpha^3+\alpha^2+\beta^3+\beta^2 &= (\alpha^3+\alpha^2)+(\beta^3+\beta^2) \\ &= (-2\alpha+4)+(-2\beta+4) \\ &= -2(\alpha+\beta)+8 \\ &= -2\cdot(-2)+8=12 \end{aligned}$$

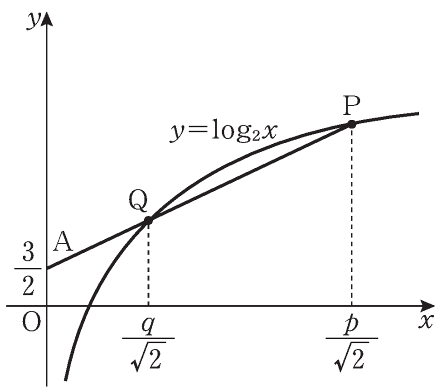
と求めることもできる。

V 解答

52—② **53**—⑥ **54**—③ **55**—② **56**—② **57**—①
58—③ **59・60**—①・⑥ **61**—③ **62・63**—①・②
64—③ **65**—④ **66**—③ **67**—② **68**—⑥ **69**—② **70**—③

解説

《対数の計算，底の変換公式，常用対数》



線分 AP を 1：2 に内分する点の座標は

$$\left(\frac{2\cdot0+1\cdot\frac{p}{\sqrt{2}}}{1+2},\ \frac{2\cdot\frac{3}{2}+1\cdot\log_2\frac{p}{\sqrt{2}}}{1+2}\right)$$

すなわち

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{6}p,\ \frac{1}{3}\log_2\frac{\sqrt{2}}{2}p+1\right)$$

$\to 52\sim57$

①，②はそれぞれ

$$\frac{\sqrt{2}}{6}p=\frac{q}{\sqrt{2}} \quad \cdots\cdots③$$

$$\frac{1}{3}\log_2\frac{\sqrt{2}}{2}p+1=\log_2\frac{q}{\sqrt{2}} \quad \cdots\cdots④$$

となるので，③から

$p=3q \quad \cdots\cdots⑤ \quad \to 58$

④から

$$\log_2\frac{\sqrt{2}}{2}p+3=3\log_2\frac{q}{\sqrt{2}}$$

$$\log_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}p\cdot 2^3\right)=\log_2\left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^3$$

$$4\sqrt{2}\,p=\frac{q^3}{2\sqrt{2}}$$

$$p=\frac{1}{16}q^3 \quad \cdots\cdots ⑥ \quad \to 59\sim 61$$

⑤，⑥から p を消去して

$$3q=\frac{1}{16}q^3$$

$$q(q^2-48)=0$$

$q>0$ より　　$q=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$　→ 65，66

$p=3q=12\sqrt{3}$　（これは $p>0$ を満たす）　→ 62〜64

このとき，点Qの y 座標は

$$\log_2\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\log_2 2\sqrt{6} \quad \to 67,\ 68$$

で，底の変換公式を用いると

$$\begin{aligned}\log_2 2\sqrt{6}&=\log_2 2+\log_2\sqrt{6}\\&=1+\frac{\frac{1}{2}\log_{10}6}{\log_{10}2}\\&=1+\frac{\log_{10}2+\log_{10}3}{2\log_{10}2}\\&=1+\frac{0.3010+0.4771}{2\times 0.3010}=2.292\cdots\end{aligned}$$

であるから，点Qの y 座標は小数第2位を四捨五入して小数第1位まで求めると　　2.3　→ 69，70