数 学

Ⅰ 解答

⑴ **1**—⑤　**2**—①　⑵ **3**—③　**4**—⑤
⑶ **5**—⑤　**6**—①
⑷ **7**・**8**—①・①　**9**—④　**10**・**11**—①・①
⑸ **12**—⑧　**13**—②　**14**—⑦

解説

《絶対値を含む式》

$$A=\sqrt{(4a-3)^2}+|a+2|=|4a-3|+|a+2|$$

⑴　$a>\dfrac{3}{4}$ のとき　　$A=(4a-3)+(a+2)$

$$=5a-1 \quad \to 1,\ 2$$

⑵　$-2\leqq a\leqq\dfrac{3}{4}$ のとき　　$A=(-4a+3)+(a+2)$

$$=-3a+5 \quad \to 3,\ 4$$

⑶　$a<-2$ のとき　　$A=(-4a+3)+(-a-2)$

$$=-5a+1 \quad \to 5,\ 6$$

⑷　$-2\leqq a\leqq\dfrac{3}{4}$ のとき，$A=-3a+5$ で単調減少より

$$-3\cdot(-2)+5\geqq-3a+5\geqq-3\cdot\frac{3}{4}+5$$

$$\frac{11}{4}\leqq A\leqq 11 \quad \to 7\sim 11$$

⑸　(i)　$a>\dfrac{3}{4}$ のとき，$A=5a-1$ より

$$5a-1=4a+7 \qquad a=8$$

これは $a>\dfrac{3}{4}$ を満たす。

(ii)　$-2 \leqq a \leqq \dfrac{3}{4}$ のとき，$A=-3a+5$ より

$$-3a+5=4a+7 \qquad a=-\frac{2}{7}$$

これは $-2 \leqq a \leqq \dfrac{3}{4}$ を満たす。

(iii)　$a<-2$ のとき　　$A=-5a+1$ より

$$-5a+1=4a+7 \qquad a=-\frac{2}{3}$$

これは $a<-2$ を満たさない。

(i)，(ii)，(iii)より　　$a=8,\ -\dfrac{2}{7}$　→ 12〜14

Ⅱ ―解答

(1) 15―②　**16**―②　**17**―⑧　**(2) 18**―④　**19**―②
(3) 20―⑦　**21**―②　**22**―⑤　**23**―②
(4) 24―⑥　**25**―④　**(5) 26**―②　**27**―④

解説

《2次関数》

(1)　$f(x)=x^2+mx+n$ とおくと

$$f(x)=\left(x+\frac{m}{2}\right)^2-\frac{m^2}{4}+n$$

これより，放物線 C の軸は直線 $x=-\dfrac{m}{2}$ である。

よって　　$-\dfrac{m}{2}=a$　　∴　$m=-2a$　→ 15

また，放物線 C が $(-1,\ 9)$ を通るので

$f(-1)=9$　すなわち　$1-m+n=9$

よって　　$n=8+m=-2a+8$　→ 16，17

(2)　(1)より　　$f(x)=x^2-2ax-2a+8$

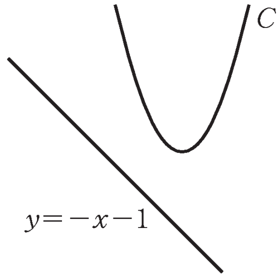
$f(x)=0$ の判別式を D_1 とすると，放物線 C が x 軸に接するのは $D_1=0$ のときである。

$$\frac{D_1}{4}=(-a)^2-(-2a+8)$$
$$=a^2+2a-8=(a+4)(a-2)$$

これより　　$(a+4)(a-2)=0$

したがって　　$a=-4$　または　$a=2$　→18，19

(3)　放物線 C が直線 $y=-x-1$ よりも上側にあるのは



$$x^2-2ax-2a+8>-x-1$$

すなわち

$$x^2+(-2a+1)x-2a+9>0$$

がすべての実数 x で成り立つときである。

x^2 の係数が正であるから，この条件を満たすのは

$$x^2+(-2a+1)x-2a+9=0$$

の判別式を D_2 として $D_2<0$ のときである。

$$\begin{aligned} D_2&=(-2a+1)^2-4(-2a+9)\\ &=4a^2+4a-35\\ &=(2a+7)(2a-5) \end{aligned}$$

これより　　$(2a+7)(2a-5)<0$

したがって　　$-\dfrac{7}{2}<a<\dfrac{5}{2}$　→20〜23

(4)　(2)の $D_1\geqq 0$ のもとで，方程式 $x^2-2ax-2a+8=0$ の解は

$$x=a\pm\sqrt{a^2-(-2a+8)}=a\pm\sqrt{a^2+2a-8}$$

であるから，x 軸から切り取る線分の長さは

$$\begin{aligned} &(a+\sqrt{a^2+2a-8})-(a-\sqrt{a^2+2a-8})\\ &=2\sqrt{a^2+2a-8} \end{aligned}$$

したがって，$2\sqrt{a^2+2a-8}=8$ となるのは

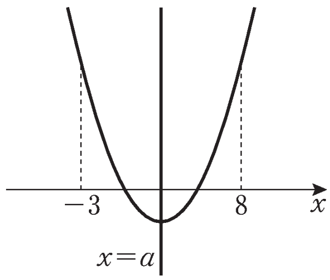
$$\sqrt{a^2+2a-8}=4\ (=\sqrt{16})$$

のときであるから

$$a^2+2a-8=16\quad \text{すなわち}\quad a^2+2a-24=0$$

を解いて　　$a=-6$　または　$a=4$　→24，25

(5)　条件を満たすのは



(i)　$D_1>0$

(ii)　軸について　　$-3<a<8$　……①

(iii)　$f(-3)\geqq 0$

(iv)　$f(8) \geqq 0$

が同時に成り立つときである。

(i)について，$(a+4)(a-2)>0$ であるから

$a<-4,\ 2<a$　……②

(iii)について，$f(-3)=9+6a-2a+8=4a+17$ から

$4a+17 \geqq 0 \qquad a \geqq -\dfrac{17}{4}$　……③

(iv)について，$f(8)=64-16a-2a+8=-18a+72$ から

$-18a+72 \geqq 0 \qquad a \leqq 4$　……④

(i)〜(iv)より，①，②，③，④の共通部分を求めて

$2<a \leqq 4$　→26，27

III 解答

(1) 28―①　**29・30**―⑥・⑩

(2) 31―⑨　**32・33**―⑧・⑩

(3) 34―③　**35・36**―④・⑩

(4) 37・38―④・⑨　**39・40・41**―②・④・⑩

(5) 42・43―②・⑦　**44・45**―④・⑨

解説

《5枚のカードを順に取り出す確率》

(1)　1回目から順に$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$とカードを取り出すときであるから，求める確率は

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{60}$$　→28〜30

(2)　1回目に$\boxed{5}$を取り出し，2，3回目とも$\boxed{4}$以外を取り出すときであるから，求める確率は

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{80}$$　→31〜33

(3)　1回目に$\boxed{4}$を取り出した上で，次のいずれかが起こるときである。

(i)　2回目に$\boxed{5}$を取り出す（3回目はどのカードを引いても机には置かない）

(ii)　2回目に$\boxed{1}$または$\boxed{2}$を取り出し，3回目に$\boxed{5}$を取り出す

(i)，(ii)は排反であるから，求める確率は

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot1+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{40} \quad \rightarrow 34〜36$$

(4)　最後に置いたカードが$\boxed{5}$で，机に置かれたカードが１枚，２枚，３枚の場合を考える。

(i)　１枚のとき，(2)よりその確率は　$\dfrac{9}{80}$

(ii)　２枚のとき，(3)よりその確率は　$\dfrac{3}{40}$

(iii)　３枚のとき，１回目から順に$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$とカードを取り出すときであるから，求める確率は

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{60}$$

(i)，(ii)，(iii)は排反であるから求める確率は

$$\frac{9}{80}+\frac{3}{40}+\frac{1}{60}=\frac{49}{240} \quad \rightarrow 37〜41$$

(5)　最後に机に置いたカードが$\boxed{5}$であるという事象をX，机に置いたカードが$\boxed{5}$だけであるという事象をYとして，求める確率$P_X(Y)$は

$$P_X(Y)=\frac{P(X\cap Y)}{P(X)}$$

(2)，(4)より，$P(X)=\dfrac{49}{240}$，$P(X\cap Y)=\dfrac{9}{80}$であるから

$$P_X(Y)=\frac{\frac{9}{80}}{\frac{49}{240}}=\frac{27}{49} \quad \rightarrow 42〜45$$

Ⅳ　解答

46―④　**47**―⑤　**48・49**―②・①　**50・51**―②・⑩
52―①　**53**―⑥　**54**―③　**55**―①　**56**―①　**57**―⑥
58―①　**59**―②　**60**―②　**61**―⑤

解説

《加法定理，三角関数の合成》

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$より

$$0+\frac{4}{5}\pi\leqq\frac{\theta}{2}+\frac{4}{5}\pi\leqq\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{4}{5}\pi$$

すなわち

$$\frac{4}{5}\pi \leqq x \leqq \frac{21}{20}\pi \quad \cdots\cdots①$$ →46〜51

このとき，$2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{29}{30}\pi\right)-2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4}{5}\pi\right)=1$ は

$$2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4}{5}\pi+\frac{1}{6}\pi\right)-2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4}{5}\pi\right)=1$$

と表せるので，$\frac{\theta}{2}+\frac{4}{5}\pi=x$ であるから

$$2\sin\left(x+\frac{1}{6}\pi\right)-2\cos x=1$$ →52，53

加法定理を用いて

$$2\left(\sin x\cos\frac{1}{6}\pi+\cos x\sin\frac{1}{6}\pi\right)-2\cos x=1$$

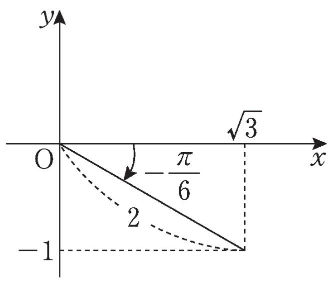
すなわち

$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)-2\cos x=1$$

したがって　　$\sqrt{3}\sin x-\cos x=1$ →54，55

ここで，$\sqrt{3}=2\cos\left(-\frac{1}{6}\pi\right)$，$-1=2\sin\left(-\frac{1}{6}\pi\right)$ から

$$\begin{aligned}&\sqrt{3}\sin x-\cos x\\&=2\left\{\sin x\cos\left(-\frac{1}{6}\pi\right)+\cos x\sin\left(-\frac{1}{6}\pi\right)\right\}\\&=2\sin\left(x-\frac{1}{6}\pi\right)\end{aligned}$$



よって，$\sqrt{3}\sin x-\cos x=1$ は $\sin\left(x-\frac{1}{6}\pi\right)=\frac{1}{2}$

と変形できる。 →56〜59

①より，$\frac{19}{30}\pi \leqq x-\frac{1}{6}\pi \leqq \frac{53}{60}\pi$ であるから，上の方程式を満たすのは

$$x-\frac{1}{6}\pi=\frac{5}{6}\pi \qquad x=\pi$$

のときである。

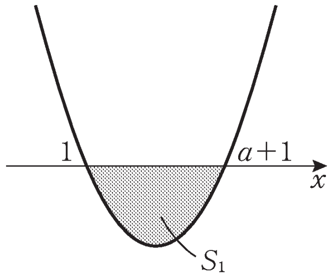
このとき，$\frac{\theta}{2}+\frac{4}{5}\pi=\pi$ より　　$\theta=\frac{2}{5}\pi$ →60，61

Ⅴ **解答** **62**—① **63**—① **64**—③ **65**—⑥ **66**—④

67—① **68**—③ **69**—③ **70**—② **71**—②

解説

《放物線と直線で囲まれた部分の面積，３次関数の増減》



$f(x)=x^2-(a+2)x+a+1$ とすると

$$f(x)=(x-1)(x-a-1)$$

であるから，C と x 軸との交点の x 座標は

$$1\text{ と }a+1 \quad \to 62,\ 63$$

C と x 軸で囲まれた部分の面積を S_1 とすると，$1\leqq x\leqq a+1$ において $f(x)\leqq 0$ であるから

$$S_1=-\int_1^{a+1}(x-1)(x-a-1)dx$$

$$=-\left\{-\frac{(a+1-1)^3}{6}\right\}$$

$$=\frac{a^3}{6} \quad \to 64,\ 65$$

また，$f'(x)=2x-(a+2)$ であるから

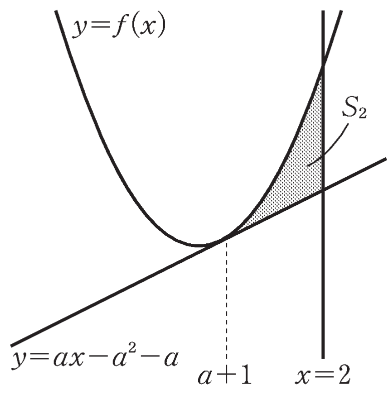
$$f'(a+1)=2(a+1)-a-2=a$$

よって，接線 l の方程式は

$$y-0=a\{x-(a+1)\}$$

$$\therefore \quad y=ax-a^2-a \quad \to 66$$

$a+1\leqq x\leqq 2$ において，$f(x)\geqq ax-a^2-a$ であるから



$$S_2=\int_{a+1}^2\{f(x)-(ax-a^2-a)\}dx$$

$$=\int_{a+1}^2\{x^2-2(a+1)x+(a+1)^2\}dx$$

$$=\int_{a+1}^2\{x-(a+1)\}^2dx$$

$$=\left[\frac{\{x-(a+1)\}^3}{3}\right]_{a+1}^2$$

$$=\frac{\{2-(a+1)\}^3-0^3}{3}$$

$$=\frac{(1-a)^3}{3} \quad \to 67\sim 69$$

また

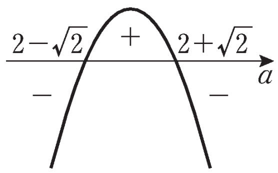
$$S=S_1+S_2=\frac{a^3}{6}+\frac{(1-a)^3}{3}$$
$$=\frac{-a^3+6a^2-6a+2}{6}$$

であるから，$S'=\dfrac{-3a^2+12a-6}{6}=-\dfrac{1}{2}(a^2-4a+2)$ より

$$S'=0 \iff a=2\pm\sqrt{2}$$

よって，S の増減表は次のとおり。

a	0	$\cdots$	$2-\sqrt{2}$	$\cdots$	1
S'		$-$	0	$+$	
S		↘	最小	↗	



したがって，$a=2-\sqrt{2}$ のとき S は最小となる。 →70，71