２０２１年度　学校推薦型選抜 (公募制) 試験問題　【マーク 公募①】

数　学

(90 分　200 点)

注意事項

① 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。

② 解答にはＨＢまたはＢの黒鉛筆（シャープペンシルはＨＢまたはＢの芯であれば使用可）を使用しなさい。

③ マークシートの解答用紙には、氏名、受験番号、科目を記入する欄と受験番号をマークする欄があります。

④ 解答方法は、マーク式です。マークシートの解答用紙にマークしなさい。
裏表紙の「数学解答上の注意」を必ず読みなさい。

⑤ 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を高くあげて監督者に知らせなさい。

⑥ 問題は全部で $\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ の 5 題あります。$\boxed{1}$ ～ $\boxed{3}$ は必須問題、$\boxed{4}$、$\boxed{5}$ は選択問題で、いずれか 1 題を選択し、合計 4 題解答すること。**$\boxed{4}$ を選択する場合はマークシートの解答用紙の科目を記入する欄に「数学 4」、$\boxed{5}$ を選択する場合はマークシートの解答用紙の科目を記入する欄に「数学 5」を記入しなさい。**

※科目を記入する欄に「数学 4」もしくは「数学 5」を記入していない場合、選択問題の採点はできません。

$\boxed{1}$ 次の各問いに答えよ。

問1 次の $\boxed{}$ の中に適するものを，下の①，②，③，④の中から選びその番号で答えよ。

① 必要十分条件である。

② 必要条件であるが十分条件でない。

③ 十分条件であるが必要条件でない。

④ 必要条件でも十分条件でもない。

(1) 自然数 m，n について，$m^2+n^2=8$ であることは，$m+n=4$ であるための $\boxed{\text{ア}}$

(2) 自然数 m，n について，$m^2+n^2 \leqq 10$ であることは，$m+n \leqq 4$ であるための $\boxed{\text{イ}}$

(3) 実数 x，y について，$x^2+2xy+y^2-2x-2y+1 \leqq 0$ であることは，$x+y \leqq 1$ であるための $\boxed{\text{ウ}}$

(4) 四面体 OABC の頂点 O から平面 ABC に下した垂線を OG とする。点 G が △ABC の重心であることは，OA＝OB＝OC かつ △ABC が正三角形であるための $\boxed{\text{エ}}$

問2 t を $0 \leqq t \leqq 1$ を満たす実数の定数とする。集合 A，B，C を

$A=\{x \mid x \text{ は整数}\}$，

$B=\{y \mid y \text{ は} -\sqrt{5}+t \leqq y \leqq \sqrt{3}+t \text{ を満たす実数}\}$，

$C=\{z \mid z \text{ は} -\sqrt{2}+t \leqq z \leqq \sqrt{3}+t \text{ を満たす実数}\}$

と定める。

(1) 集合 $A \cap B$ の要素の個数 $n(A \cap B)$ は，

$0 \leqq t \leqq \boxed{\text{オカ}}+\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$ のとき $\boxed{\text{ク}}$ 個，

$\boxed{\text{オカ}}+\sqrt{\boxed{\text{キ}}} < t < \boxed{\text{ケ}}-\sqrt{\boxed{\text{コ}}}$ のとき $\boxed{\text{サ}}$ 個，

$\boxed{\text{ケ}}-\sqrt{\boxed{\text{コ}}} \leqq t \leqq 1$ のとき $\boxed{\text{シ}}$ 個

である。

(2) 集合 $A \cap C$ の要素の個数 $n(A \cap C)$ は，

$0 \leqq t < \boxed{\text{ス}}-\sqrt{\boxed{\text{セ}}}$ のとき $\boxed{\text{ソ}}$ 個，

$\boxed{\text{ス}}-\sqrt{\boxed{\text{セ}}} \leqq t \leqq \boxed{\text{タチ}}+\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}$ のとき $\boxed{\text{テ}}$ 個，

$\boxed{\text{タチ}}+\sqrt{\boxed{\text{ツ}}} < t \leqq 1$ のとき $\boxed{\text{ト}}$ 個

である。

$\boxed{2}$ △ABC において，AB＝5，BC＝7，CA＝4 とする。このとき，次の各問いに答えよ。

問 1 $\cos \angle \mathrm{BAC} = \dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}}$ である。

問 2 $\sin \angle \mathrm{BAC} = \dfrac{\boxed{エ}\sqrt{\boxed{オ}}}{\boxed{カ}}$ であるので，△ABC の面積は $\boxed{キ}\sqrt{\boxed{ク}}$ である。

問 3 △ABC の内接円の半径は $\dfrac{\sqrt{\boxed{ケ}}}{\boxed{コ}}$ である。

問 4 △ABC の内心を I とすると，線分 BI の長さは $\dfrac{\sqrt{\boxed{サシ}}}{\boxed{ス}}$ である。

問 5 直線 BI と辺 AC の交点を D とすると，線分 AD の長さは $\dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}$ であり，線分 BD の長さは $\dfrac{\boxed{タ}\sqrt{\boxed{チツ}}}{\boxed{テ}}$ である。

$\boxed{3}$　次の各問いに答えよ。

問１　2 定点 O(0, 0)，A(4, 2) と円 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$ 上を動く点 P がある。3 点 O，A，P が同一直線上にないとき，△OAP の重心 G の軌跡は，円 $\left(x-\boxed{\text{ア}}\right)^2+\left(y-\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\right)^2=\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$

となり，この円周上の 2 点 $\left(\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}},\ \dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\right)$，$\left(\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}},\ \dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}\right)$ を除く。

ただし，$\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}<\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ とする。

問２　関数 $f(x)=2\cos x(\sin x+\cos x)\left(-\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$ を考える。

$f(x)=\sqrt{\boxed{\text{セ}}}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ソ}}}\right)+\boxed{\text{タ}}$ より，

$x=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{チ}}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{ツ}}+\sqrt{\boxed{\text{テ}}}$，$x=-\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ト}}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{ナ}}$ をとる。

$\boxed{4}$　四面体OABCにおいて，辺ABを1 : 2に内分する点をD，線分CDを3 : 5に内分する点をE, 線分OEを2 : 1に内分する点をF，直線AFが平面OBCと交わる点をG，直線OGとBCの交点をHとする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，次の各問いに答えよ。

問 1　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{\boxed{\text{ア}}\,\vec{a}+\vec{b}}{\boxed{\text{イ}}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}\,\vec{a}+\vec{b}+\boxed{\text{エ}}\,\vec{c}}{\boxed{\text{オ}}}$

問 2　$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\dfrac{\boxed{\text{カキク}}\,\vec{a}+\vec{b}+\boxed{\text{ケ}}\,\vec{c}}{\boxed{\text{コサ}}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}\overrightarrow{\mathrm{AF}}$

問 3　BH : HC $=\boxed{\text{セ}}:\boxed{\text{ソ}}$

$\boxed{5}$ 次の各問いに答えよ。

問１ a，b を定数とする２つの関数 $f(x)=\sin x+x^2+1$，$g(x)=\dfrac{a}{bx+1}$ がある。

$$f'(0)=g'(0),\quad f''(0)=g''(0)$$

であるとき，$a=\boxed{\text{ア}}$，$b=\boxed{\text{イウ}}$ である。

問２ $f'(a)$ が存在するとき，次の極限を a，$f(a)$，$f'(a)$ を用いて表すと，

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}=\boxed{\text{エ}}f'(a),$$

$$\lim_{x\to a}\frac{a^2f(x)-x^2f(a)}{x-a}=\boxed{\text{オ}}^2f'(a)-\boxed{\text{カキ}}f(a)$$

である。

問３ 関数 $f(x)$ はすべての実数 x に対して微分可能で，２つの条件

(A) すべての実数 x，y に対して $f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy$

(B) $f'(0)=2$

を満たしているとき，

$$f(0)=\boxed{\text{ク}},\quad \lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{y}=\boxed{\text{ケ}},\quad f'(1)=\boxed{\text{コ}}$$

である。