数　学

1 解答

［1］ア．1080　イ．1093500

［2］ウ．$-14i$　エ．$82i$

［3］オ．$\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$　カ．$\dfrac{7}{12}\pi$

2 解答

(1)
$$f'(x)=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x$$
$$=-e^{-x}(\sin x-\cos x)$$
$$=-\sqrt{2}\,e^{-x}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$e^{-x}>0$ で，$0\leqq x\leqq\pi$ より

$$-\frac{\pi}{4}\leqq x-\frac{\pi}{4}\leqq\frac{3}{4}\pi$$

ゆえに，$f'(x)=0$ となるのは

$$x-\frac{\pi}{4}=0 \qquad \therefore \quad x=\frac{\pi}{4}$$

したがって，$0\leqq x\leqq\pi$ における $f(x)$ の増減表は右のようになるので，$f(x)$ は $x=\dfrac{\pi}{4}$ のとき極大値

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	極大	↘	0

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=e^{-\frac{\pi}{4}}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$$

をとる。極小値はない。 ……(答)

(2)
$$\int f(x)dx=\int e^{-x}\sin x\,dx=-e^{-x}\sin x+\int e^{-x}\cos x\,dx$$
$$=-e^{-x}\sin x+\left\{-e^{-x}\cos x+\int e^{-x}(-\sin x)dx\right\}$$
$$=-e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x-\int f(x)dx$$

$$\therefore\quad \int f(x)dx=\frac{1}{2}(-e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x)+C$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)+C\quad (C\text{ は積分定数})\quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(3) $$\int g(x)dx=\int\sqrt{2}\,e^{-x}\cos^2 x dx=\sqrt{2}\int e^{-x}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}dx$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\int e^{-x}dx+\int e^{-x}\cos 2x dx\right)$$

ここで，C を積分定数として

$$\int e^{-x}dx=-e^{-x}+C$$

また

$$\int e^{-x}\cos 2x dx=-e^{-x}\cos 2x+\int e^{-x}\cdot(-2\sin 2x)dx$$

$$=-e^{-x}\cos 2x-2\int e^{-x}\sin 2x dx$$

$$=-e^{-x}\cos 2x-2\left(-e^{-x}\sin 2x+\int e^{-x}\cdot 2\cos 2x dx\right)$$

$$=-e^{-x}\cos 2x+2e^{-x}\sin 2x-4\int e^{-x}\cos 2x dx$$

$$\therefore\quad \int e^{-x}\cos 2x dx=\frac{1}{5}(-e^{-x}\cos 2x+2e^{-x}\sin 2x)+C$$

$$=-\frac{1}{5}e^{-x}(\cos 2x-2\sin 2x)+C$$

以上から

$$\int g(x)dx=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{-e^{-x}-\frac{1}{5}e^{-x}(\cos 2x-2\sin 2x)\right\}+C$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{10}e^{-x}(5+\cos 2x-2\sin 2x)+C\quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(4) 曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=g(x)$ の交点について，2 式から y を消去して

$$f(x)=g(x)$$

すなわち

$$e^{-x}\sin x=\sqrt{2}\,e^{-x}\cos^2 x$$

$e^{-x}>0$ より

$$\sin x=\sqrt{2}\cos^2 x$$

$$\sin x=\sqrt{2}(1-\sin^2 x)$$

$$\sqrt{2}\sin^2 x+\sin x-\sqrt{2}=0$$

$$(\sqrt{2}\sin x-1)(\sin x+\sqrt{2})=0$$

$0\leqq x\leqq\pi$ で $\sin x\geqq 0$ から $\sin x+\sqrt{2}>0$ より

$$\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0\leqq x\leqq\pi$ から　　$x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi$

また

$$f(x)-g(x)=e^{-x}(\sin x-\sqrt{2}\cos^2 x)$$
$$=e^{-x}(\sqrt{2}\sin x-1)(\sin x+\sqrt{2})$$

$e^{-x}>0$ で $0\leqq x\leqq\pi$ のとき $\sin x+\sqrt{2}>0$ から

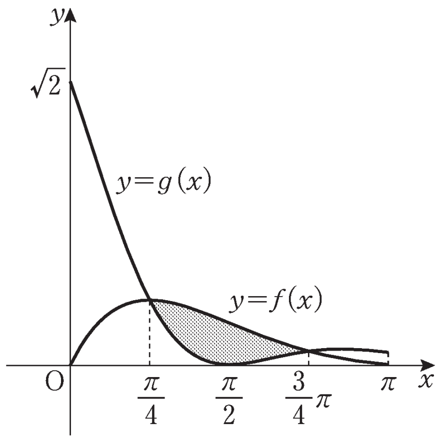
(i)　$\sin x\geqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ すなわち $\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq\dfrac{3}{4}\pi$ のとき

$$f(x)-g(x)\geqq 0\qquad\therefore\quad f(x)\geqq g(x)$$

(ii)　$\sin x\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ すなわち

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ または $\dfrac{3}{4}\pi\leqq x\leqq\pi$ のとき

$$f(x)-g(x)\leqq 0\qquad\therefore\quad f(x)\leqq g(x)$$



ゆえに，求める面積 S は右上図網かけ部分である。

したがって，(2)，(3)より

$$S=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}f(x)dx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}g(x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}$$

$$-\left[-\frac{\sqrt{2}}{10}e^{-x}(5+\cos 2x-2\sin 2x)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}\pi}\left(\sin\frac{3}{4}\pi+\cos\frac{3}{4}\pi\right)+\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}\left(\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\right)$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{10}\left\{e^{-\frac{3}{4}\pi}\left(5+\cos\frac{3}{2}\pi-2\sin\frac{3}{2}\pi\right)-e^{-\frac{\pi}{4}}\left(5+\cos\frac{\pi}{2}-2\sin\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}\pi}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{10}e^{-\frac{3}{4}\pi}(5+0+2)-\frac{\sqrt{2}}{10}e^{-\frac{\pi}{4}}(5+0-2)$$

$$=\frac{7\sqrt{2}}{10}e^{-\frac{3}{4}\pi}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{10}\right)e^{-\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\,(7e^{-\frac{3}{4}\pi}+2e^{-\frac{\pi}{4}})}{10}$$ ……(答)

3 解答

(1) 与えられた等式より

$$3\vec{p}-\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}=t(3\vec{c}-\vec{a}-2\vec{b})$$

$$(\vec{p}-\vec{a})+(\vec{p}-\vec{b})+(\vec{p}-\vec{c})=t\{(\vec{c}-\vec{a})+2(\vec{c}-\vec{b})\}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}=t(\overrightarrow{\mathrm{AC}}+2\overrightarrow{\mathrm{BC}})$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}+(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})+(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})=t\{\overrightarrow{\mathrm{AC}}+2(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})\}$$

$$3\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-2t)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(1+3t)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1-2t}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1+3t}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$ ……①

点Pが直線AB上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となる実数 k が存在する。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\not\parallel\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ から

$$\frac{1+3t}{3}=0 \qquad \therefore\quad t=-\frac{1}{3}$$ ……(答)

このとき，①より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{3}\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

よって

AP：BP＝5：4 ……(答)

(2) 点Pが直線BC上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\not\parallel\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と①から

$$\frac{1-2t}{3}+\frac{1+3t}{3}=1$$

$$2+t=3$$

$\therefore\quad t=1$　……(答)

このとき，①より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{-\overrightarrow{\mathrm{AB}}+4\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{4-1}$$

したがって，点 P は線分 BC を 4：1 に外分する点であるので

BP：CP＝4：1　……(答)

(3)　点 P が △ABC の内部または周に含まれるための条件は，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\not\parallel\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と①より

$$\frac{1-2t}{3}\geqq 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{1+3t}{3}\geqq 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{1-2t}{3}+\frac{1+3t}{3}\leqq 1$$

すなわち

$$t\leqq\frac{1}{2} \quad \text{かつ} \quad t\geqq-\frac{1}{3} \quad \text{かつ} \quad t\leqq 1$$

これより

$-\frac{1}{3}\leqq t\leqq\frac{1}{2}$　……(答)

(4)　①より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}+t\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$$

△ABC の重心を G，線分 AB を 2：1 に内分する点を D とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3},\quad \overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

から

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AG}}+t(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}})=\overrightarrow{\mathrm{AG}}+t\overrightarrow{\mathrm{DC}}$$

したがって，点 P の軌跡は △ABC の重心 G を通り，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ に平行な直線である。

点 P が直線 AC 上にあるとき，(1)と同様に考えて

$$\frac{1-2t}{3}=0 \qquad \therefore\quad t=\frac{1}{2}$$

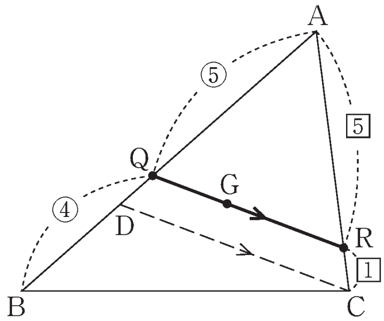
このとき，①より

$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{3}{2}\right)\overrightarrow{AC}=\frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$$

よって

$$AP:CP=5:1$$

これと(1)より，線分 AB を 5：4 に内分する点を Q，線分 AC を 5：1 に内分する点を R とすると，点 P の軌跡のうち △ABC の内部または周に含まれる部分は線分 QR である。



ここで

$$AQ=\frac{5}{9}AB=\frac{5}{9}\cdot 6=\frac{10}{3}$$

$$AR=\frac{5}{6}AC=\frac{10}{3}$$

また，△ABC において余弦定理より

$$\begin{aligned}\cos\angle BAC=\cos\angle QAR\\ &=\frac{4^2+6^2-5^2}{2\cdot 4\cdot 6}=\frac{9}{16}\end{aligned}$$

であるから，△AQR において余弦定理より

$$\begin{aligned}QR^2&=AQ^2+AR^2-2AQ\cdot AR\cdot\cos\angle QAR\\ &=\left(\frac{10}{3}\right)^2+\left(\frac{10}{3}\right)^2-2\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{9}{16}\\ &=\left(\frac{10}{3}\right)^2\left(1+1-2\cdot\frac{9}{16}\right)\\ &=\left(\frac{10}{3}\right)^2\cdot\frac{7}{8}\end{aligned}$$

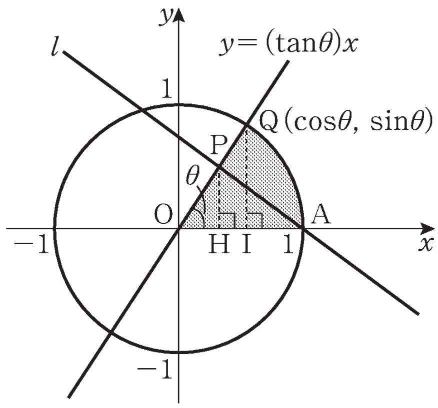
QR＞0 より

$$QR=\frac{10}{3}\sqrt{\frac{7}{8}}=\frac{10}{3}\cdot\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{14}}{6}\quad\cdots\cdots(答)$$

4 解答

(1)　$y=(\tan\theta)x$ は原点を通り，x 軸の正の向きとなす角が θ の直線を表す。

したがって，領域 D は右図の網かけ部分（境界含む）である。



直線 $y=(\tan\theta)x$ と円 $x^2+y^2=1$ の交点のうち，第一象限にもあるものを点 $\mathrm{Q}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とすると，領域 D の面積を 2 等分する直線 l は線分 OQ と交わる。

領域 D の面積を S とすると，S は扇形 OAQ の面積に等しいので

$$S=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\theta=\frac{1}{2}\theta$$

また，点 $\mathrm{P}(p,\ (\tan\theta)p)\ (p>0)$ とおくと

$$\triangle\mathrm{OAP}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(\tan\theta)p=\frac{1}{2}(\tan\theta)p$$

$\triangle\mathrm{OAP}=\dfrac{1}{2}S$ より

$$\frac{1}{2}(\tan\theta)p=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\theta$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $\tan\theta>0$ から

$$p=\frac{\theta}{2\tan\theta}\ (>0)$$

したがって，点 P の y 座標は　$(\tan\theta)p=\dfrac{\theta}{2}$

よって，交点 P の座標は

$$\mathrm{P}\left(\frac{\theta}{2\tan\theta},\ \frac{\theta}{2}\right)\quad\cdots\cdots(答)$$

(2)　点 P から x 軸に下ろした垂線の足を H とすると，(1)より

$$\mathrm{PH}=\frac{\theta}{2}$$

$\triangle\mathrm{OAP}$ を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体は，半径 PH の円を底面とする 2 つの円錐を合わせたものである。このとき高さの和は OA の長さに等しいので

$$V=\frac{1}{3}\cdot\pi\mathrm{PH}^2\cdot\mathrm{OA}=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{\theta}{2}\right)^2\cdot 1=\frac{\pi\theta^2}{12}\quad\cdots\cdots(答)$$

(3) 点 Q$(\cos\theta,\ \sin\theta)$ から x 軸に下ろした垂線の足を I とすると，

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $\cos\theta>0$，$\sin\theta>0$ から

$$\mathrm{OI}=\cos\theta,\quad \mathrm{QI}=\sin\theta$$

また，$x^2+y^2=1$ について $y^2=1-x^2$ から

$$\begin{aligned}
W&=\frac{1}{3}\cdot\pi\mathrm{QI}^2\cdot\mathrm{OI}+\int_{\cos\theta}^{1}\pi y^2dx\\
&=\frac{1}{3}\pi\sin^2\theta\cos\theta+\pi\int_{\cos\theta}^{1}(1-x^2)dx\\
&=\frac{1}{3}\pi\sin^2\theta\cos\theta+\pi\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_{\cos\theta}^{1}\\
&=\frac{1}{3}\pi\sin^2\theta\cos\theta+\pi\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(\cos\theta-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right)\right\}\\
&=\frac{1}{3}\pi\sin^2\theta\cos\theta+\pi\left\{\frac{2}{3}-\cos\theta+\frac{1}{3}(1-\sin^2\theta)\cos\theta\right\}\\
&=\frac{2\pi(1-\cos\theta)}{3}\quad\cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

(4) (2)，(3)より

$$\begin{aligned}
\lim_{\theta\to+0}\frac{V}{W}&=\lim_{\theta\to+0}\frac{\pi\theta^2}{12}\cdot\frac{3}{2\pi(1-\cos\theta)}\\
&=\lim_{\theta\to+0}\frac{\theta^2}{8(1-\cos\theta)}\\
&=\lim_{\theta\to+0}\frac{\theta^2(1+\cos\theta)}{8(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}\\
&=\lim_{\theta\to+0}\frac{\theta^2(1+\cos\theta)}{8\sin^2\theta}\\
&=\lim_{\theta\to+0}\frac{1+\cos\theta}{8\left(\dfrac{\sin\theta}{\theta}\right)^2}\\
&=\frac{1+1}{8\cdot1^2}=\frac{1}{4}\quad\cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$