数　学

1 解答

[1] アイ. 17　**ウエ.** 13
[2] オカ. 61　**キクケ.** 216
[3] コサ. -1　**シス.** -2　**[4] セソ.** 25　**タチ.** 72
[5] ツ. 7　**テ.** 2　**[6] ト.** 0　**ナニ.** 10
[7] ヌネ. 13　**ノハ.** 67

2 解答

[1] ア. 5　**イウ.** 17　**エ.** 2　**オ.** 2　**カ.** 3
[2] キ. 3　**ク.** 2　**ケ.** 3　**コ.** 2　**サ.** 2
シス. -9　**セソ.** 16

3 解答

(1)　$t>0$ より，直線PQの傾きは $-\dfrac{1}{t}$ とかける。

さらに直線PQは点 $(1,\ t)$ を通るので，直線PQの方程式は

$$y=-\frac{1}{t}(x-1)+t$$

整理して　　$y=-\dfrac{1}{t}x+t+\dfrac{1}{t}$

P，Qはそれぞれ y 座標，x 座標が0なので代入すると，$\mathrm{P}(t^2+1,\ 0)$，$\mathrm{Q}\left(0,\ t+\dfrac{1}{t}\right)$ である。

よって，△OPQの面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\cdot(t^2+1)\cdot\frac{t^2+1}{t}=\frac{(t^2+1)^2}{2t}=\frac{1}{2}\left(t^3+2t+\frac{1}{t}\right)$$

$$\frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}\left(3t^2+2-\frac{1}{t^2}\right)=\frac{3t^4+2t^2-1}{2t^2}$$

$$=\frac{(3t^2-1)(t^2+1)}{2t^2}$$

$t^2+1>0$，$2t^2>0$ より，$\dfrac{dS}{dt}=0$ となるのは

$$3t^2-1=0 \qquad t^2=\frac{1}{3}$$

$t>0$ だから　　$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

この前後で $3t^2-1$ の符号は負から正へ変わるので，S は減少から増加に転じる。$t>0$ においては $\dfrac{dS}{dt}=0$ となるのはこのときのみであるから，S が最小となるのは $t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のときである。　……(答)

また，このときの S は

$$S=\frac{\left(\frac{1}{3}+1\right)^2}{\frac{2}{\sqrt{3}}}=\frac{16}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{8\sqrt{3}}{9} \quad \text{……(答)}$$

(2)　線分 PQ の長さは t の値によらず正であるから，PQ の長さ L が最小になるとき，$\mathrm{PQ}^2=L^2$ も最小となる。

$$L^2=(t^2+1)^2+\frac{1}{t^2}(t^2+1)^2$$
$$=\frac{(t^2+1)^2\cdot(t^2+1)}{t^2}$$
$$=\frac{(t^2+1)^3}{t^2}$$

$$\frac{dL^2}{dt}=\frac{3(t^2+1)^2\cdot 2t\cdot t^2-(t^2+1)^3\cdot 2t}{t^4}$$
$$=\frac{t(t^2+1)^2(6t^2-2t^2-2)}{t^4}$$
$$=\frac{(t^2+1)^2(4t^2-2)}{t^3}$$

$t^2+1>0$，$t^3>0$ より，$\dfrac{dL^2}{dt}=0$ となるのは

$$4t^2-2=0 \qquad t^2=\frac{1}{2}$$

$t>0$ だから　　$t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

この前後で $4t^2-2$ の符号は負から正へ変わるので，L^2 は減少から増加に転じる。$t>0$ においては $\dfrac{dL^2}{dt}=0$ となるのはこのときのみであるから，L^2 が最小，つまり L が最小となるのは $t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のときである。 ……(答)

また，このときの L は

$$L=\sqrt{\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3}{\frac{1}{2}}}=\sqrt{\frac{27}{8}\cdot 2}=\frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \text{……(答)}$$

(3)　点 $(1,\ t)$ を R とすると，求める立体は底面が半径 OR の円で高さがそれぞれ PR，QR である円すい 2 つを組み合わせた形となる。

よって，$\mathrm{OR}^2=t^2+1$ より，求める立体の体積 V は

$$V=\frac{\pi}{3}\cdot \mathrm{OR}^2\cdot \mathrm{PQ}$$

$$=\frac{\pi}{3}\cdot(t^2+1)\cdot\frac{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}{t}$$

体積 V は t の値によらず正であるから，V が最小になるとき，V^2 も最小となる。$V^2=\dfrac{\pi^2(t^2+1)^5}{9t^2}$ であるから

$$\frac{dV^2}{dt}=\frac{\pi^2}{9}\cdot\frac{5(t^2+1)^4\cdot 2t\cdot t^2-2t(t^2+1)^5}{t^4}$$

$$=\frac{\pi^2}{9}\cdot\frac{t(t^2+1)^4(10t^2-2t^2-2)}{t^4}$$

$$=\frac{\pi^2}{9}\cdot\frac{(t^2+1)^4(8t^2-2)}{t^3}$$

$t^2+1>0$，$t^3>0$ より $\dfrac{dV^2}{dt}=0$ となるのは

$$8t^2-2=0 \qquad t^2=\frac{1}{4}$$

$t>0$ だから　　$t=\dfrac{1}{2}$

この前後で $8t^2-2$ の符号は負から正へ変わるので，V^2 は減少から増加に転じる。$t>0$ においては $\dfrac{dV^2}{dt}=0$ となるのはこのときのみであるから，V^2 が最小，つまり V が最小となるのは $t=\dfrac{1}{2}$ のときである。……(答)

また，このときの V は

$$V=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{5}{2}}}{\frac{1}{2}}=\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{25\sqrt{5}}{32}$$

$$=\frac{25\sqrt{5}}{48}\pi \quad \cdots\cdots(\text{答})$$