

数 学

(2023)

- (注意事項)
- 1 問題文は6ページあります。見開いた右半分は余白になっています。
 - 2 解答は本冊子の裏表紙にある〔解答上の注意〕に従って、解答用紙の所定欄に記入してください。下書きには、問題冊子の余白を利用してください。ただし、回収はしませんので採点の対象とはなりません。
 - 3 解答はすべてマークセンス方式となっていますので、解答用紙の注意事項をよく読み解答してください。
 - 4 受験番号・氏名・フリガナは、監督者の指示に従って、解答用紙の所定欄に丁寧に記入してください。
 - 5 解答用紙にマークセンス方式の受験番号欄があります。受験番号をマークする際は濃く丁寧にぬってください。
 - 6 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページ落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。

1 次の各問の に適する答を解答欄にマークせよ。

[1] $(x-5)(x-3)(x-1)(x+1)(x+3)(x+5)$ を展開したとき、 x^4 の項の係数は アイウ である。

[2] 5人でじゃんけんを1回行う。1人だけ勝つ確率は $\frac{\text{エ}}{\text{オカ}}$ であり、2人だけ勝つ確率は $\frac{\text{キク}}{\text{ケコ}}$ である。だれも勝たない確率は $\frac{\text{サシ}}{\text{スセ}}$ である。

[3] 等式 $x^2 - 8x + y^2 + 2y = 0$ を満たす整数 x, y の組の個数は ソ 個であり、そのうち xy が最小となるのは $x = \text{タ}$, $y = \text{チツ}$ のときである。

[4] 2つのベクトル $(1, 1, 1)$ と $(1, 2, 3)$ に垂直なベクトルの中で、大きさが $\sqrt{6}$, x 成分が正のものは $(\text{テ}, \text{トナ}, \text{ニ})$ である。

[5] 方程式

$$x(x+1)(x+3) = 4 \cdot 5 \cdot 7$$

の3つの解は、 $x = \text{ヌ}$, および $x = \text{ネノ} \pm \sqrt{\text{ハヒ}} i$ である。ただし、 i は虚数単位とする。

2 次の各問の に適する答を解答欄にマークせよ。

[1] 座標平面において、ある2次関数のグラフが3点(1, 0), (2, 1), (-1, 16)を通るとする。この2次関数は $y = \text{ア} x^2 - \text{イ} x + \text{ウ}$ である。

[2] 2160の正の約数のうち、9の倍数は 個ある。また、2160の正の約数のうち、72の倍数のすべての和は である。

[3] 不等式

$$\log_6 |x - 1| + \log_6 |x - 6| < 1$$

の解は

$$\text{コ} < x < \text{サ}, \quad \text{シ} < x < \text{ス}, \quad \text{セ} < x < \text{ソ}, \\ \text{タ} < x < \text{チ}$$

である。

ただし、 $\text{コ} \leq \text{サ} \leq \text{シ} \leq \text{ス} \leq \text{セ} \leq \text{ソ} \leq \text{タ} \leq \text{チ}$ とする。

[4] 数列の和 S が次のように定められるとする。

$$S = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1)^2 + \dots + n \cdot (-1)^{n-1}$$

このとき、 S を求めると

$$S = \frac{\text{ツ}}{\text{テ}} - (-1)^n \left(\frac{\text{ト}}{\text{ナ}} n + \frac{\text{ニ}}{\text{ヌ}} \right)$$

となる。

[5] 1個のさいころを5回続けて投げ、出た目を記録したところ次のようになった。

6 6 1 4 2

さらにさいころを2回続けて投げ、出た目をデータに追加したところ、中央値が1だけ小さくなった。

このとき、追加後のデータの平均値がとりうる値の中で最大のものは $\frac{\text{ネノ}}{\text{ハ}}$ 、最小のものは

$\frac{\text{ヒフ}}{\text{ヘ}}$ である。

3 次の各問の に適する答を解答欄にマークせよ。

[1] $\triangle ABC$ において、 $AB = 6$ 、 $BC = 8$ 、 $AC = 7$ のとき、この三角形に内接する円の半径 r を求めたい。

(1) $\triangle ABC$ の内角 $\angle A$ の大きさを A とするとき、余弦定理より、 $\cos A = \frac{\text{ア}}{\text{イ}}$ である。

$\sin A > 0$ であるから、 $\sin A = \frac{\sqrt{\text{ウエ}}}{\text{オ}}$ である。

(2) $\triangle ABC$ の面積 S は、 $S = \frac{\text{カキ} \sqrt{\text{クケ}}}{\text{コ}}$ と求められる。また、 $\triangle ABC$ の面積 S は、

$S = \frac{\text{サシ}}{\text{ス}} r$ とも表すことができる。

(3) 以上より、内接円の半径は $r = \frac{\sqrt{\text{セソ}}}{\text{タ}}$ である。

[2] a 、 b を実数とするとき、次の文中の空欄に当てはまるものを、下の選択肢の中から1つ選び、その番号を解答欄にマークせよ。

(1) $a^2 = b^2$ は $a = b$ であるための 。

(2) $a^3 = b^3$ は $a^2 = b^2$ であるための 。

(3) $a^2 > b^2$ は $a^3 > b^3$ であるための 。

(4) $a^4 = b^4$ は $a^2 = b^2$ であるための 。

チ , ツ , テ , ト の選択肢

- ① 必要条件であるが十分条件ではない
- ② 十分条件であるが必要条件ではない
- ③ 必要十分条件である
- ④ 必要条件でも十分条件でもない

4 次の各問の に適する答を解答欄にマークせよ。

定義域を $0 \leq x < 2\pi$ とする関数

$$f(x) = 9 \sin^2 x + 6 \sin x \cos x + \cos^2 x - 1$$

について考える。

(1) 2倍角の公式を使うと

$$f(x) = \text{ア} \sin 2x - \text{イ} \cos 2x + \text{ウ}$$

と変形できる。

(2) さらに三角関数の合成より

$$f(x) = \text{エ} \sin(2x + \theta) + \text{オ}$$

と変形できる。ただし、 $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。このとき、

$$\cos \theta = \frac{\text{カ}}{\text{キ}}$$

$$\sin \theta = \frac{\text{クケ}}{\text{コ}}$$

である。

(3) $f(x)$ は、 $x = \frac{\text{サ}}{\text{シ}} \pi - \frac{1}{2} \theta$ および $x = \frac{\text{ス}}{\text{セ}} \pi - \frac{1}{2} \theta$ で、最大値 をとる。

ただし、 $\frac{\text{サ}}{\text{シ}} < \frac{\text{ス}}{\text{セ}}$ とする。

(4) $f(x)$ は、 $x = \frac{\text{タ}}{\text{チ}} \pi - \frac{1}{2} \theta$ および $x = \frac{\text{ツテ}}{\text{ト}} \pi - \frac{1}{2} \theta$ で、最小値 をとる。

ただし、 $\frac{\text{タ}}{\text{チ}} < \frac{\text{ツテ}}{\text{ト}}$ とする。

5 次の各問の に適する答を解答欄にマークせよ。

定義域を $0 < x < 1$ とする関数 $f(x) = x^2(1-x)$ について考える。また、曲線 $y = f(x)$ 上の点を $A(a, f(a))$ とする。ただし、 a は $0 < a < 1$ の範囲を動くとする。

(1) 関数 $f(x)$ は、 $x = \frac{\text{ア}}{\text{イ}}$ のとき、最大値 $\frac{\text{ウ}}{\text{エオ}}$ をとる。

(2) 直線 $x = 0$ 、直線 $y = 0$ 、点 A を通り y 軸に平行な直線、点 A を通り x 軸に平行な直線で囲まれる長方形の面積は $a = \frac{\text{カ}}{\text{キ}}$ で最大になり、そのときの面積は $\frac{\text{クケ}}{\text{コサシ}}$ である。

(3) 点 A における曲線 $y = f(x)$ の接線の傾きは $\text{ス} a - \text{セ} a^2$ である。接線の傾きは $a = \frac{\text{ソ}}{\text{タ}}$ で最大になり、そのときの接線の方程式は $y = \frac{\text{チ}}{\text{ツ}} x - \frac{\text{テ}}{\text{トナ}}$ である。

(4) 原点と点 A を結ぶ直線の傾きは $a = \frac{\text{ニ}}{\text{ヌ}}$ で最大になり、そのときの直線の方程式は $y = \frac{\text{ネ}}{\text{ノ}} x \cdots \cdots \text{①}$

である。

(5) 曲線 $y = x^2(1-x)$ と直線①で囲まれる領域の面積は $\frac{\text{ハ}}{\text{ヒフヘ}}$ である。

6 次の各問の に適する答を解答欄にマークせよ。

ある2次関数のグラフ F は原点 $(0, 0)$ を通り、点 $(3, 6)$ で $y = -4x + 18$ と接する放物線である。
 x 座標が a である F 上の点を A とする。ただし、 a は $-1 \leq a \leq 1$ を満たす定数とする。

(1) F の方程式は $y = \text{アイ} x^2 + \text{ウ} x$ である。

(2) F 上の点 A を通り、傾きが2である直線を l とする。直線 l の方程式は

$$y = \text{エ} x - \text{オ} a^2 + \text{カ} a$$

と表すことができる。

直線 l は F と異なる2点で交わり、そのうち、 A 以外の交点の座標は

(キ $a + \text{ク}$, ケコ $a^2 + \text{サ} a + \text{シ}$) である。

(3) $-1 \leq a < 0$ とする。 x, y が連立不等式

$$\begin{cases} y \leq \text{アイ} x^2 + \text{ウ} x, \\ y \geq \text{エ} x - \text{オ} a^2 + \text{カ} a \end{cases}$$

を満たすとき、 $4x + y$ は、 a の値によらず $x = \text{ス}$, $y = \text{セ}$ で最大値 ソタ をとる。

また、 $4x + y$ の最小値が $-\frac{13}{2}$ となるとき、 a の値は $\frac{\text{チツ}}{\text{テ}}$ である。

(4) $0 \leq a \leq 1$ とする。 x, y が連立不等式

$$\begin{cases} y \leq \text{アイ} x^2 + \text{ウ} x, \\ y \geq \text{エ} x - \text{オ} a^2 + \text{カ} a \end{cases}$$

を満たすとき、 $4x + y$ の最大値と最小値の差が10となるのは、 a の値が $\frac{\text{ト}}{\text{ナ}}$ のときである。

解答上の注意

1. 問題の文中の , , などの には、特に指示がない限り、数字 (0～9)、アルファベット (a～d) または負の符号 (－) が入る。ア、イ、ウ、…… の一つ一つは、これらのいずれか一つに対応する。それらを解答用紙のア、イ、ウ、…… で示された解答欄にマークせよ。

[例1] に -86 と答えたいとき

ア	<input checked="" type="radio"/>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d
イ	<input type="radio"/>	0	1	2	3	4	5	6	7	<input checked="" type="radio"/>	9	a	b	c	d
ウ	<input type="radio"/>	0	1	2	3	4	5	<input checked="" type="radio"/>	7	8	9	a	b	c	d

[例2] - に $9 - a$ と答えたいとき

エ	<input type="radio"/>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	<input checked="" type="radio"/>	a	b	c	d
オ	<input type="radio"/>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	<input checked="" type="radio"/>	b	c	d

2. 分数で解答するときは、既約分数 (それ以上約分できない分数) で答えよ。符号は分子に付け、分母に付けた形では答えないこと。

[例3] $\frac{\text{カキ}}{\text{ク}}$ に $-\frac{2}{7}$ と答えたいときは、 $\frac{-2}{7}$ として

カ	<input checked="" type="radio"/>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d
キ	<input type="radio"/>	0	1	<input checked="" type="radio"/>	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d
ク	<input type="radio"/>	0	1	2	3	4	5	6	<input checked="" type="radio"/>	8	9	a	b	c	d

3. 根号を含む形で解答する場合は、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えよ。

例えば、 $4\sqrt{2}$ 、 $\frac{\sqrt{13}}{2}$ と答えるところを、 $2\sqrt{8}$ 、 $\frac{\sqrt{52}}{4}$ のように答えないこと。