

数 学

(2023)

- (注意事項)
- 1 問題文は4ページあります。
 - 2 解答は、問題冊子に折り込まれている解答用紙（オモテとウラの両面）の所定欄に記入してください。下書きは、問題冊子の余白を利用してください。ただし、回収はしませんので採点の対象とはなりません。
 - 3 定規は使用することができます。計算・メモ・通信などの機能をもった時計や電卓、携帯電話などは使用できません。
 - 4 受験番号・氏名・フリガナは、監督者の指示に従って、解答用紙の所定欄に丁寧に記入してください。正しく記入されていない場合は、採点できないことがあります。
 - 5 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページ落丁・乱丁及び解答用紙の汚れなどに気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。

1 次の に当てはまる数値または式を答えよ。

[1] ベクトル \vec{a} , \vec{b} について $|\vec{a}| = 20$, $|\vec{b}| = 24$, $|\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}| = 16\sqrt{2}$ とする。このとき、 \vec{a} と \vec{b} の内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ は ア に等しく、 \vec{a} と \vec{b} のなす角 θ に対して $\cos \theta =$ イ である。

[2] 複素数平面において、点 A (1) と点 B ($\sqrt{3}i$) を通る直線と原点との距離は ウ である。また、この直線上にあって原点からの距離が $\sqrt{3}$ である点を表す複素数のうち、実部が正であるものは エ である。ただし、 $i^2 = -1$ とする。

[3] 座標平面において、楕円 $x^2 + \frac{y^2}{6} = 1$ 上の点 $(\frac{\sqrt{30}}{6}, -1)$ における接線 l の方程式は $y =$ オ である。この直線 l が楕円 $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$ ($a > 0$) にも接しているとき、 $a =$ カ である。

2 a を実数の定数とする。整式

$$f(x) = x^4 - (a+1)x^3 + (a+1)x^2 - (a+1)x + a$$

$$g(x) = ax + a - 1$$

について次の各問に答えよ。

- (1) 不等式 $g(x) < 0$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。
- (2) 不等式 $f(x) > 0$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。
- (3) x を実数とする。命題「 $f(x) > 0 \implies g(x) < 0$ 」が真であるための、定数 a についての条件を求めよ。
- (4) x を実数とする。命題「 $f(x) \leq 0 \implies g(x) < 0$ 」が真であるための、定数 a についての条件を求めよ。

3 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin^{2n-1} x \, dx$$

とおくとき、次の各問に答えよ。

(1) a_1 を求めよ。

(2) a_n を n の式で表せ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n k a_k$ を求めよ。

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$ を求めよ。

4 実数の定数 p に対して、関数 $f(x) = \frac{10x}{5x^2 + 4}$ が $x = p$ で最大値をとるものとする。また、 O を原点とする座標平面上の曲線 $y = f(x)$ を C とし、曲線 C 上の点 $(p, f(p))$ を P とする。このとき、次の各問に答えよ。

(1) 直線 OP の傾きを求めよ。

(2) 曲線 C と円 $x^2 + y^2 = 1$ の交点のうち x 座標が正である点 $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ を Q とするとき、 $\tan \alpha$ を求めよ。

(3) (2)の点 Q に対して、 $\triangle OPQ$ の面積を求めよ。

—問題文終り—