数学

1 解答

［1］ア．72　イ．$\dfrac{3}{20}$　［2］ウ．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　エ．$\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

［3］オ．$\sqrt{30}x-6$　カ．$\dfrac{\sqrt{42}}{6}$

2 解答

(1)　$f(x)=x^4-(a+1)x^3+(a+1)x^2-(a+1)x+a$

$g(x)=ax+a-1$

$g(x)<0$ のとき

$$ax+a-1<0$$

$$ax<1-a$$

よって，$g(x)<0$ を満たす実数 x の範囲は

$$\begin{cases} a<0 \text{ のとき} & x>\dfrac{1-a}{a} \\ a=0 \text{ のとき} & 0\cdot x<1 \text{ より } x \text{ はすべての実数} \quad \cdots\cdots(\text{答}) \\ a>0 \text{ のとき} & x<\dfrac{1-a}{a} \end{cases}$$

(2)　$f(x)=(x-1)(x^3-ax^2+x-a)$

$$=(x-1)(x-a)(x^2+1)$$

$x^2+1>0$ であるので，$f(x)>0$ を満たす実数 x の範囲は

$$\begin{cases} a<1 \text{ のとき} & x<a,\ 1<x \\ a\geqq 1 \text{ のとき} & x<1,\ a<x \end{cases} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(3)　命題P：「$f(x)>0 \Longrightarrow g(x)<0$」とする。

$a<0$ のとき

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^4\left(1-\frac{a+1}{x}+\frac{a+1}{x^2}-\frac{a+1}{x^3}+\frac{a}{x^4}\right)=\infty>0$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}(ax+a-1)=\infty>0$$

より，$f(x)>0$ かつ $g(x)>0$ となる実数 x が存在するので，命題 P は偽である。
$a=0$ のとき，すべての実数 x について $g(x)<0$ が成り立つので，命題 P は真である。
$a>0$ のとき

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}x^4\left(1-\frac{a+1}{x}+\frac{a+1}{x^2}-\frac{a+1}{x^3}+\frac{a}{x^4}\right)=\infty>0$$

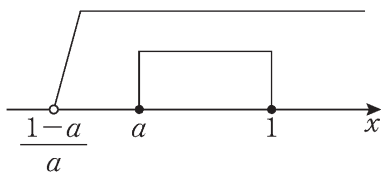
$$\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}(ax+a-1)=\infty>0$$

より，$f(x)>0$ かつ $g(x)>0$ となる実数 x が存在するので，命題 P は偽である。
以上より，命題 P が真となるための a の条件は　$a=0$　……(答)

(4)　命題 Q：「$f(x)\leqq 0 \Longrightarrow g(x)<0$」とする。
(2)の結果から，$f(x)\leqq 0$ となる実数 x の範囲は

$a<1$ のとき　$a\leqq x\leqq 1$
$a\geqq 1$ のとき　$1\leqq x\leqq a$

(i)　$a<0$ のとき
$f(x)\leqq 0$ を満たす実数 x の範囲は　$a\leqq x\leqq 1$
$g(x)<0$ を満たす実数 x の範囲は　$x>\dfrac{1-a}{a}$
$a\leqq x\leqq 1$ が $x>\dfrac{1-a}{a}$ に含まれるのは



$$\frac{1-a}{a}<a$$

のとき。$a<0$ より

$$1-a>a^2 \qquad a^2+a-1<0$$

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<a<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

これと，$a<0$ より命題 Q が真となるのは

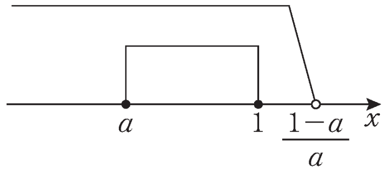
$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<a<0$$

(ii)　$a=0$ のとき
すべての実数 x について $g(x)<0$ が成り立つので，命題 Q は真である。

(iii)　$0<a<1$ のとき

$f(x)\leqq 0$ を満たす実数 x の範囲は　　$a\leqq x\leqq 1$

$g(x)<0$ を満たす実数 x の範囲は　　$x<\dfrac{1-a}{a}$



$a\leqq x\leqq 1$ が $x<\dfrac{1-a}{a}$ に含まれるのは

$$1<\frac{1-a}{a}$$

のとき。$a>0$ より

$$a<1-a \qquad a<\frac{1}{2}$$

これと，$0<a<1$ より命題 Q が真となるのは

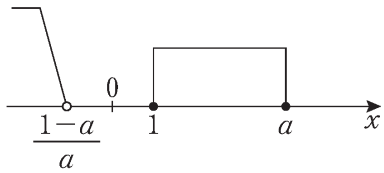
$$0<a<\frac{1}{2}$$

(iv)　$a\geqq 1$ のとき

$f(x)\leqq 0$ を満たす実数 x の範囲は　　$1\leqq x\leqq a$

$g(x)<0$ を満たす実数 x の範囲は　　$x<\dfrac{1-a}{a}$

$a\geqq 1$ より $\dfrac{1-a}{a}\leqq 0<1$ であるので，$1\leqq x\leqq a$ が $x<\dfrac{1-a}{a}$ に含まれることはない。



以上(i)～(iv)より，命題 Q が真となるための a の条件は

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<a<\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

3　解答

(1)　$a_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\sin^{2n-1}x\,dx$

$$a_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\sin x\,dx$$

$t=\cos x$ とおくと

$$dt=-\sin x\,dx$$

x	$0 \to \dfrac{\pi}{2}$
t	$1 \to 0$

よって

$$a_1=\int_1^0 t^5(-dt)=\int_0^1 t^5 dt$$

$$=\left[\frac{t^6}{6}\right]_0^1=\frac{1}{6} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) $$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\sin^{2n-1}x dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x(1-\sin^2 x)^2\sin^{2n-1}x dx$$

$t=\sin x$ とおくと

$$dt=\cos x dx$$

x	$0 \to \frac{\pi}{2}$
t	$0 \to 1$

$$a_n=\int_0^1(1-t^2)^2 t^{2n-1}dt$$

$$=\int_0^1(1-2t^2+t^4)t^{2n-1}dt$$

$$=\int_0^1(t^{2n-1}-2t^{2n+1}+t^{2n+3})dt$$

$$=\left[\frac{1}{2n}t^{2n}-\frac{2}{2n+2}t^{2n+2}+\frac{1}{2n+4}t^{2n+4}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+2)}$$

$$=\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(3) $$\sum_{k=1}^{n}ka_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k(k+1)(k+2)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}ka_k=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(4) $$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}=\frac{1}{4}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

4 **解答** (1) $f(x)=\dfrac{10x}{5x^2+4}$

$$f'(x)=10\cdot\frac{1\cdot(5x^2+4)-x\cdot 10x}{(5x^2+4)^2}$$

$$=10\cdot\frac{-(5x^2-4)}{(5x^2+4)^2}$$

$f'(x)=0$ とすると　$x=\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

よって，$f(x)$ の増減は右の表のようになるので，$f(x)$ は $x=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ のとき最大値 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ をとる。

x	$\cdots$	$-\frac{2}{\sqrt{5}}$	$\cdots$	$\frac{2}{\sqrt{5}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{\sqrt{5}}{2}$	↗	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	↘

よって，$p=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ であるから　$\mathrm{P}\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}},\ \dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$

よって，求める直線 OP の傾きは

$$\frac{f(p)}{p}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{2}{\sqrt{5}}}=\frac{5}{4}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

(2) 点 $(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ は $y=f(x)$ 上の点であるので

$$\sin\alpha=\frac{10\cos\alpha}{5\cos^2\alpha+4}$$

$\cos\alpha>0$ より

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{10}{5\cos^2\alpha+4}$$

$$\tan\alpha=\frac{10}{5\left(\dfrac{1}{1+\tan^2\alpha}\right)+4}$$

$$\tan\alpha=\frac{10+10\tan^2\alpha}{9+4\tan^2\alpha}$$

$$4\tan^3\alpha-10\tan^2\alpha+9\tan\alpha-10=0$$

$$(\tan\alpha-2)(4\tan^2\alpha-2\tan\alpha+5)=0$$

ここで

$$4\tan^2\alpha-2\tan\alpha+5=4\left(\tan\alpha-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{19}{4}>0$$

より　　$\tan\alpha=2$　……(答)

(3)　このとき，$1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ より

$$1+2^2=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{5}$$

となり，$\cos\alpha>0$ より

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

よって　　$\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$

ゆえに

$$\triangle\mathrm{OPQ}=\frac{1}{2}\left|\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\right|=\frac{3}{20}\quad\text{……(答)}$$