数　　学

E方式（2023）

（注意事項）

1　問題文は３ページあります。

2　解答は，解答用紙(オモテとウラの両面)の所定欄に記入してください。下書きは，問題冊子の余白を利用してください。ただし，回収はしませんので採点の対象とはなりません。

3　解答は一部記述を含むマークセンス方式となっています。解答用紙の注意事項をよく読み解答してください。

4　定規は使用することができます。計算・メモ・通信などの機能をもった時計や電卓，携帯電話などは使用できません。

5　受験番号・氏名・フリガナは，監督者の指示に従って，解答用紙の所定欄に丁寧に記入してください。

6　解答用紙にマークセンス方式の受験番号欄があります。受験番号をマークする際は濃く丁寧にぬってください。

7　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページ落丁・乱丁及び解答用紙の汚れなどに気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。

1 次の □ に当てはまる数字または記号を選び，マークせよ。ただし，分数はそれ以上約分できない形で答えよ。また，根号を含む形で解答する場合は，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えよ。

[1] $0 \leqq t \leqq 2$ とする。平面上のベクトル $\vec{a}=(1,\ 3)$，$\vec{b}=(2,\ 1)$ に対し，$|t\vec{a}-3\vec{b}|$ の最小値は $\dfrac{\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イウ}}}{\boxed{エ}}$ であり，最大値は $\boxed{オ}\sqrt{\boxed{カ}}$ である。

[2] $\log_5 (x+5)^5=0$ を満たす x の値は $\boxed{キク}$ であり，$\log_3 \sqrt[3]{y+3}=1$ を満たす y の値は $\boxed{ケコ}$ である。

[3] a，b を実数の定数とし，$b>0$ とする。x についての3次方程式 $x^3-ax+b=0$ の3つの解が，ある実数の定数 θ を用いて $2\sin\theta$，$3\cos 2\theta$，$-\dfrac{5}{3}$ と表せるとき，$a=\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$，$b=\dfrac{\boxed{スセ}}{\boxed{ソタ}}$ である。

[4] 座標空間内の3点 O $(0,\ 0,\ 0)$，A $(5,\ 5,\ 0)$，B $(2,\ 1,\ -1)$ を頂点とする△OAB の面積は $\dfrac{\boxed{チ}\sqrt{\boxed{ツ}}}{\boxed{テ}}$ である。

[5] a，b，c を実数の定数 $(a \neq 0)$ とする。x の3次式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+1$ で表される関数がその導関数 $f'(x)$ で割り切れるとき，

$\dfrac{f(x)}{f'(x)}=\dfrac{\boxed{ト}}{\boxed{ナ}}x+\dfrac{b}{\boxed{ニ}\,a}$ である。さらに $f(c)=1331$ となるとき，$b=\boxed{ヌネ}$ である。

[6] 数直線上を運動する点Pの時刻 t における速度 v が $v=12-6t\ (0 \leqq t \leqq 6)$ で与えられるとき，$t=0$ から $t=6$ までにPが通過する道のりは $\boxed{ノハ}$ に等しい。

2 次の [ ] に当てはまる数字または記号を選び，マークせよ。ただし，分数はそれ以上約分できない形で答えよ。また，根号を含む形で解答する場合は，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えよ。

[1] ある高校の60人の生徒を対象に，北海道と沖縄県に行ったことがあるかどうかを調べたところ，どちらにも行ったことがない生徒の人数は，両方に行ったことがある生徒の人数の3倍に等しかった。また，北海道に行ったことがある生徒の人数は沖縄県に行ったことがある生徒の人数以上であり，沖縄県に行ったことがある生徒の人数は北海道に行ったことがある生徒の人数の半分以上であった。これらのことから，北海道に行ったことがある生徒の人数xのとりうる値の範囲は [アイ] $\leqq x \leqq$ [ウエ] であり，沖縄県に行ったことがある生徒の人数yのとりうる値の範囲は [オカ] $\leqq y \leqq$ [キク] である。また，どちらにも行ったことがない生徒の人数は最大で [ケコ] であることがわかる。

[2] 数列$\{a_n\}$に対して，

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,\quad T_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

とおいたところ，$S_n = 2n(34 - n)$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ となった。このとき，

$$a_n = \boxed{\text{サシ}}\, n + \boxed{\text{スセ}}$$

であり，$S_n = T_n$となる最大の整数nの値は [ソタ] である。また，$T_n - S_n = 900$となるnの値は [チツ] である。

3　$0 < \alpha < 2\pi$ とする。座標平面上の曲線

$$C : y = x\cos x$$

について，曲線 C 上の点 $(\alpha,\ \alpha\cos\alpha)$ における接線 ℓ が原点を通るとき，次の各問に答えよ。

(1)　α を求めよ。

(2)　$x \geqq 0$ において，曲線 C は直線 ℓ より下にないことを示せ。

(3)　不定積分 $\displaystyle\int x\cos x\,dx$ を求めよ。

(4)　$\dfrac{\alpha}{4} < x < 4\alpha$ の範囲で，曲線 C と直線 ℓ によって囲まれた部分の面積を（α を含まない形で）求めよ。

－問題文終り－