

2 教科型全学部統一入試E方式

数学

- 1** **解答** [1]ア. 3 イウ. 10 エ. 2 オ. 3 カ. 5
[2]キク. -4 ケコ. 24
[3]サ. 7 シ. 3 スセ. 20 ソタ. 27 [4]チ. 5 ツ. 3 テ. 2
[5]ト. 1 ナ. 3 ニ. 9 ヌネ. 10 [6]ノハ. 60

- 2** **解答** [1]アイ. 15 ウエ. 40 オカ. 12 キク. 30
ケコ. 45
[2]サシ. -4 スセ. 70 ソタ. 17 チツ. 32

- 3** **解答** (1) $y = x \cos x$ を x で微分すると、 $y' = \cos x - x \sin x$ であるから、 C 上の点 $(\alpha, \alpha \cos \alpha)$ における接線 l の方程式は

$$\begin{aligned} y &= (\cos \alpha - \alpha \sin \alpha)(x - \alpha) + \alpha \cos \alpha \\ &= (\cos \alpha - \alpha \sin \alpha)x - \alpha \cos \alpha + \alpha^2 \sin \alpha + \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

すなわち $y = (\cos \alpha - \alpha \sin \alpha)x + \alpha^2 \sin \alpha$

これが原点を通るとき、 $x = y = 0$ を代入すると $0 = \alpha^2 \sin \alpha$ となるので

$$\alpha = 0 \quad \text{または} \quad \sin \alpha = 0$$

$0 < \alpha < 2\pi$ より、 $\alpha \neq 0$ なので $\sin \alpha = 0$

よって $\alpha = \pi$ ……(答)

(2) $\alpha = \pi$ を代入して、 l の方程式は $y = -x$ である。

$f(x) = x \cos x - (-x) = x(\cos x + 1)$ とすると、 $x \geq 0$ ではつねに $x \geq 0$ かつ $\cos x + 1 \geq 0$ であるから、 $x \geq 0$ のとき

$$f(x) = x \cos x + x \geq 0$$

つまり、 $x \geq 0$ においてつねに $x \cos x \geq -x$ より、 $x \geq 0$ において、曲線 C は直線 l より下にならない。 (証明終)

$$\begin{aligned}
(3) \quad \int x \cos x dx &= \int x (\sin x)' dx \\
&= x \sin x - \int \sin x dx \\
&= x \sin x - (-\cos x) + C_1 \\
&= x \sin x + \cos x + C_1 \quad (C_1 \text{ は積分定数}) \quad \dots\dots (\text{答})
\end{aligned}$$

(4) $\frac{\pi}{4} < x < 4\pi$ の範囲で、曲線 C と直線 l の交点は

$$x \cos x = -x \iff x(\cos x + 1) = 0$$

$$\frac{\pi}{4} < x < 4\pi \text{ より} \quad x = \pi, 3\pi$$

よって、交点は $(\pi, -\pi), (3\pi, -3\pi)$

(2)より C と l の上下は入れ替わらないので、求める面積 S は

$$\begin{aligned}
S &= \int_{\pi}^{3\pi} (x \cos x + x) dx \\
&= \left[x \sin x + \cos x + \frac{1}{2} x^2 \right]_{\pi}^{3\pi} \\
&= \left(0 - 1 + \frac{9\pi^2}{2} \right) - \left(0 - 1 + \frac{\pi^2}{2} \right) \\
&= 4\pi^2 \quad \dots\dots (\text{答})
\end{aligned}$$