1 次の $\boxed{}$ に当てはまる数値または式を答えよ。

[1] 5400の正の約数は $\boxed{\text{ア}}$ 個あり，そのうち3で割り切れないものは $\boxed{\text{イ}}$ 個ある。

[2] a，bを実数の定数とする。4次方程式 $x^4 + ax^2 + b = 0$ が$2 - i$を解にもつとき，$a = \boxed{\text{ウ}}$，$b = \boxed{\text{エ}}$ である。ただし，$i^2 = -1$とする。

[3] 座標平面上の曲線 $C : y = \sqrt{x}$ $(x \geqq 0)$ 上の点 $(1,\ 1)$ における接線をℓとすると，直線ℓの方程式は $y = \boxed{\text{オ}}$ であり，曲線C，直線ℓおよびy軸で囲まれた図形をy軸のまわりに1回転してできる立体の体積は $\boxed{\text{カ}}$ である。

2 座標平面上の曲線

$$C : y = x^3 + 3x$$

を考える。曲線 C 上の点 $\mathrm{P}_0(-2,\ -14)$ における接線を ℓ_0 とし，直線 ℓ_0 と曲線 C の共有点で，点 P_0 とは異なる点を $\mathrm{P}_1(a_1,\ b_1)$ とする。さらに，曲線 C 上の点 P_1 における接線 ℓ_1 と曲線 C の共有点で，点 P_1 とは異なる点を $\mathrm{P}_2(a_2,\ b_2)$ とする。以下，この操作を繰り返して，点 $\mathrm{P}_n(a_n,\ b_n)\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ を定め，点 P_n における接線を ℓ_n とする。

曲線 C と直線 ℓ_n で囲まれた図形の面積を S_n とおくとき，以下の各問に答えよ。

(1) a_1 を求めよ。

(2) a_{n+1} と a_n の関係式を求め，a_n を n を用いて表せ。

(3) すべての実数 α，β に対して $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(\beta - x)\,dx = A(\beta-\alpha)^N$ が成り立つように定数 A，N を定めよ。

(4) S_n を n を用いて表せ。

$\boxed{3}$ $0<\alpha<\pi$をみたす実数αに対して，空間内の４点A$(0,\ 0,\ 1)$，B$(1,\ 0,\ 0)$，C$(1,\ 2,\ 3)$，P$(\cos\alpha,\ \sin\alpha,\ 0)$をとる。また，原点Oを中心とする半径１の球面と直線OCの交点のうち，z座標が正であるものをDとする。このとき，以下の各問に答えよ。

(1) ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$とベクトル$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$のなす角を$\theta$とするとき，$\cos\theta$を$\alpha$を用いて表せ。

(2) $t=\cos\dfrac{\alpha}{2}$とするとき，$\triangle$ABPの面積をtを用いて表せ。

(3) $\triangle$ABPの面積が$\dfrac{4\sqrt{5}}{9}$に等しいとき，$\triangle$OBPの面積を求めよ。

(4) (3)のとき，四面体OBDPの体積を求めよ。

$\boxed{4}$ 実数全体で連続な関数$f(x)$，$g(x)$ が

$$f(x) = x^2 + \int_0^1 tf(t)\,dt, \quad g(x) = x^2 + \int_0^1 (x+t)g(t)\,dt$$

を満たしている。さらに，関数 $h(x)$ を

$$h(x) = \int_0^{g(x)} e^{f(t)}\,dt$$

で定めるとき，以下の各問に答えよ。

(1) $f(x)$ を求めよ。

(2) $g(x)$ を求めよ。

(3) $h(x)$ は極小値をとることを示せ。