3 教科型学部個別入試Ａ方式（理工学部）

数学

1

解答　[1]ア．48　イ．12　[2]ウ．-6　エ．25

[3]オ．$\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$　カ．$\frac{\pi}{30}$

2

解答　$C：y=x^3+3x$，$y'=3x^2+3$

(1)　$x=-2$ のとき，$y'=15$ より

$$l_0：y-(-14)=15\{x-(-2)\} \Longleftrightarrow y=15x+16$$

a_1 は方程式 $x^3+3x=15x+16$ の $x=-2$ 以外の解である。

$$x^3-12x-16=0$$

すなわち，$(x+2)^2(x-4)=0$ より

$$a_1=4 \quad \cdots\cdots(答)$$

別解　$l_0：y=p_0x+q_0$ とおくと，C と l_0 は $x=-2$ で接し，$x=a_1$ で交わるので

$$x^3+3x=p_0x+q_0$$

すなわち，$x^3+(3-p_0)x-q_0=0$ は $x=-2$，-2，a_1 を解にもつ。

よって，解と係数の関係より

$$(-2)+(-2)+a_1=0 \qquad \therefore \quad a_1=4$$

(2)　点 $\mathrm{P}_n(a_n,\ b_n)$ は曲線 C 上の点であるので，$b_n=a_n{}^3+3a_n$ より

$$l_n：y-(a_n{}^3+3a_n)=(3a_n{}^2+3)(x-a_n) \Longleftrightarrow y=(3a_n{}^2+3)x-2a_n{}^3$$

a_{n+1} は方程式 $x^3+3x=(3a_n{}^2+3)x-2a_n{}^3$ の $x=a_n$ 以外の解である。

$$x^3-3a_n{}^2x+2a_n{}^3=0$$

すなわち，$(x-a_n)^2(x+2a_n)=0$ より

$$a_{n+1}=-2a_n \quad \cdots\cdots(答)$$

ゆえに，数列 $\{a_n\}$ は，初項 a_1，公比 -2 の等比数列であるから

$$a_n=a_1\cdot(-2)^{n-1}=4\cdot(-2)^{n-1}=(-2)^{n+1} \quad \cdots\cdots(答)$$

別解　$l_n: y=p_nx+q_n$ とおくと，C と l_n は $x=a_n$ で接し，$x=a_{n+1}$ で交わるので

$$x^3+3x=p_nx+q_n$$

すなわち，$x^3+(3-p_n)x-q_n=0$ は $x=a_n$，a_n，a_{n+1} を解にもつ。
よって，解と係数の関係より

$$a_n+a_n+a_{n+1}=0 \qquad \therefore \quad a_{n+1}=-2a_n$$

(3)

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(\beta-x)\,dx &=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2\{-(x-\alpha)+\beta-\alpha\}\,dx \\ &=\int_\alpha^\beta \{-(x-\alpha)^3+(\beta-\alpha)(x-\alpha)^2\}\,dx \\ &=\left[-\frac{(x-\alpha)^4}{4}+(\beta-\alpha)\cdot\frac{(x-\alpha)^3}{3}\right]_\alpha^\beta \\ &=-\frac{(\beta-\alpha)^4}{4}+(\beta-\alpha)\cdot\frac{(\beta-\alpha)^3}{3} \\ &=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4\end{aligned}$$

よって　$A=\dfrac{1}{12}$，$N=4$　……(答)

別解

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(\beta-x)\,dx &=\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3(\beta-x)\right]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\cdot(-1)\,dx \\ &=\int_\alpha^\beta\frac{1}{3}(x-\alpha)^3dx \\ &=\frac{1}{3}\left[\frac{(x-\alpha)^4}{4}\right]_\alpha^\beta \\ &=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4\end{aligned}$$

(4)

$$S_n=\left|\int_{a_n}^{a_{n+1}}\{(3{a_n}^2+3)x-2{a_n}^3-(x^3+3x)\}\,dx\right|$$

であり，(2)で述べたことから

$$-(x^3-3{a_n}^2x+2{a_n}^3)=-(x-a_n)^2(x+2a_n)$$

が成立するので

$$\begin{aligned}S_n&=\left|\int_{a_n}^{-2a_n}(x-a_n)^2(-2a_n-x)\,dx\right| \\ &=\left|\frac{1}{12}(-2a_n-a_n)^4\right|\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{12}\cdot 3^4\cdot a_n{}^4$$

$$=\frac{1}{12}\cdot 3^4\cdot\{(-2)^{n+1}\}^4$$

$$=27\cdot 2^{4n+2}\quad\cdots\cdots(答)$$

$\boxed{3}$ **解答** A(0, 0, 1), B(1, 0, 0), C(1, 2, 3), P$(\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$ $(0<\alpha<\pi)$

(1) $\overrightarrow{AB}=(1, 0, -1)$, $\overrightarrow{AP}=(\cos\alpha, \sin\alpha, -1)$ より

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+(-1)^2}=\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=1\cdot\cos\alpha+0\cdot\sin\alpha+(-1)\cdot(-1)=\cos\alpha+1$$

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AP}|}=\frac{\cos\alpha+1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\cos\alpha+1}{2}\quad\cdots\cdots(答)$$

(2) $$\cos\theta=\frac{\cos\alpha+1}{2}=\cos^2\frac{\alpha}{2}=t^2$$

θは2つのベクトルのなす角なので，$0<\theta<\pi$ である。

よって，$\sin\theta>0$ であるから

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-(t^2)^2}=\sqrt{1-t^4}$$

したがって

$$\triangle\mathrm{ABP}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AP}|\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-t^4}$$

$$=\sqrt{1-t^4}\quad\cdots\cdots(答)$$

(3) $\triangle\mathrm{ABP}=\dfrac{4\sqrt{5}}{9}$ のとき，(2)より

$$\sqrt{1-t^4}=\frac{4\sqrt{5}}{9}$$

両辺正なので2乗して

$$1-t^4=\frac{80}{81}$$

$$t^4=\frac{1}{81}$$

$0<\alpha<\pi$ より　　$0<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{2}$

よって，$t=\cos\dfrac{\alpha}{2}>0$ であるので

$$\cos\frac{\alpha}{2}=t=\frac{1}{3}$$

このとき，$\sin\dfrac{\alpha}{2}>0$ より

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{1-\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

B$(1,\ 0,\ 0)$，P$(\cos\alpha,\ \sin\alpha,\ 0)$ より，$\angle$BOP$=\alpha$ であるので

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{OBP}&=\frac{1}{2}\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OP}\sin\alpha\\&=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\\&=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{9}\quad\cdots\cdots(答)\end{aligned}$$

(4)　Dは線分OC上の点で，OD$=1$，OC$=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{\sqrt{14}}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left(\frac{1}{\sqrt{14}},\ \frac{2}{\sqrt{14}},\ \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$$

四面体OBDPの底面を△DBPとみたとき，その高さは $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ の z 成分であるから，求める体積は

$$\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{OBP}\times\frac{3}{\sqrt{14}}=\frac{1}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{9}\times\frac{3}{\sqrt{14}}=\frac{2\sqrt{7}}{63}\quad\cdots\cdots(答)$$

4　**解答**　$f(x)=x^2+\displaystyle\int_0^1 tf(t)\,dt$，$g(x)=x^2+\displaystyle\int_0^1 (x+t)\,g(t)\,dt$，

$h(x)=\displaystyle\int_0^{g(x)} e^{f(t)}dt$

(1)　$A=\displaystyle\int_0^1 tf(t)\,dt$ とおくと，$f(x)=x^2+A$ より

$$A=\int_0^1 t(t^2+A)\,dt=\int_0^1 (t^3+At)\,dt$$

$$=\left[\frac{t^4}{4}+\frac{A}{2}t^2\right]_0^1=\frac{1}{4}+\frac{A}{2}$$

よって，$\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{4}$ より　　$A=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\quad f(x)=x^2+\dfrac{1}{2}$　……(答)

(2)　　$g(x)=x^2+\displaystyle\int_0^1(x+t)\,g(t)\,dt$

$$=x^2+x\int_0^1 g(t)\,dt+\int_0^1 tg(t)\,dt$$

$B=\displaystyle\int_0^1 g(t)\,dt$，$C=\displaystyle\int_0^1 tg(t)\,dt$ とおくと，$g(x)=x^2+Bx+C$ より

$$B=\int_0^1(t^2+Bt+C)\,dt$$

$$=\left[\frac{t^3}{3}+\frac{B}{2}t^2+Ct\right]_0^1=\frac{1}{3}+\frac{B}{2}+C$$

$\therefore\quad \dfrac{B}{2}-C=\dfrac{1}{3}$　……①

$$C=\int_0^1 t(t^2+Bt+C)\,dt$$

$$=\left[\frac{t^4}{4}+\frac{B}{3}t^3+\frac{C}{2}t^2\right]_0^1=\frac{1}{4}+\frac{B}{3}+\frac{C}{2}$$

$\therefore\quad \dfrac{B}{3}-\dfrac{C}{2}=-\dfrac{1}{4}$　……②

①，②を解くと　　$B=-5$，$C=-\dfrac{17}{6}$

$\therefore\quad g(x)=x^2-5x-\dfrac{17}{6}$　……(答)

(3)　　$h'(x)=e^{f(g(x))}\cdot g'(x)=e^{f(g(x))}(2x-5)$

$h'(x)=0$ とすると，$e^{f(g(x))}>0$ より　　$x=\dfrac{5}{2}$

よって，$h(x)$ の増減は右の表のようになるので，
$h(x)$ は極小値をとる。　　　　　　(証明終)

x	$\cdots$	$\frac{5}{2}$	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	極小	↗