2教科型全学部統一入試E方式
2教科型グローバル教育プログラム統一入試G方式
5科目型国公立併願アシスト入試P方式

数学

1 解答

［1］ア．6　［2］イウ．−3　エオ．17　カキ．90
［3］クケ．19　［4］コサ．35　シス．13
［5］セソ．−1　［6］タ．6　チ．6　ツ．2
［7］テトナ．−16　ニヌ．16

2 解答

［1］アイ．74
［2］ウエ．−3　オカ．99　キクケコ．1683
［3］サシス．−12　セ．0　ソ．1　タ．4

3 解答

(1)　$y=\tan x$ を x で微分すると，$y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ であるから，

$y=\tan x$ の $x=\dfrac{\pi}{4}$ における微分係数は2である。

よって，求める接線の方程式は

$$y=2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1$$

すなわち　$y=2x+1-\dfrac{\pi}{2}$　……(答)

(2)
$$\begin{cases} y=\tan x & \left(0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}\right) \\ y=\tan^2 x & \left(0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

より，y を消去して

$$\tan x=\tan^2 x$$

$$\tan x(\tan x-1)=0$$

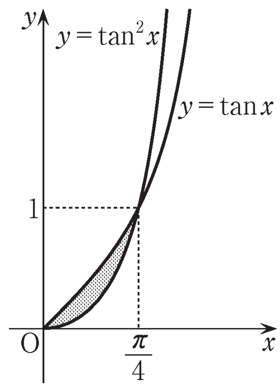
$\tan x=0,\ 1$

これを $0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で解くと

$\tan x=0$ より　　$x=0$

$\tan x=1$ より　　$x=\dfrac{\pi}{4}$

よって，求める x 座標は　　$x=0,\ \dfrac{\pi}{4}$　……(答)



(3)　右図より，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ において $0\leqq\tan x\leqq 1$ より，つねに $\tan^2 x\leqq\tan x$ であるから，求める面積を S_1 とおくと

$$S_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x-\tan^2 x)\,dx$$

である。ここで

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx\\&=\Big[-\log(\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}\\&=-\left(\log\frac{1}{\sqrt{2}}-\log 1\right)\\&=-\log\frac{1}{\sqrt{2}}\\&=\frac{1}{2}\log 2\end{aligned}$$

であることと

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,dx&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\{(\tan x)'-1\}\,dx\\&=\Big[\tan x-x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}\end{aligned}$$

$$=\left(1-\frac{\pi}{4}\right)-(0-0)$$

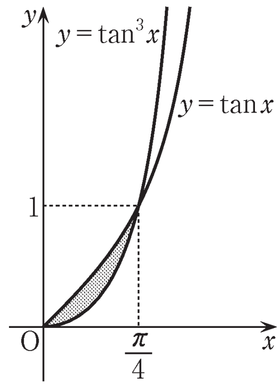
$$=1-\frac{\pi}{4}$$

であることから

$$S_1=\frac{1}{2}\log 2-\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}-1+\frac{1}{2}\log 2 \quad \cdots\cdots(答)$$

(4)　C_1 と C_3 の共有点について



$$\begin{cases} C_1 : y=\tan x & \left(0 \leqq x<\frac{\pi}{2}\right) \\ C_3 : y=\tan^3 x & \left(0 \leqq x<\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

より，y を消去して

$$\tan x=\tan^3 x$$

$$\tan x(\tan^2 x-1)=0$$

$$\tan x(\tan x-1)(\tan x+1)=0$$

$$\tan x=0,\ 1,\ -1$$

これを $0 \leqq x<\frac{\pi}{2}$ の範囲で解くと，C_1 と C_3 の共有点の x 座標は

$$x=0,\ \frac{\pi}{4}$$

右上図より，$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}$ において $0 \leqq \tan x \leqq 1$ より，つねに $\tan^3 x \leqq \tan x$ であるから，求める面積を S_2 とおくと

$$S_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x-\tan^3 x)\,dx$$

である。ここで

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x-\tan^3 x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x-\tan^2 x\cdot\tan x)\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{\tan x-\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\cdot\tan x\right\}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\{2\tan x-(\tan x)'\cdot\tan x\}\,dx$$

であり，(3)から $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\tan x dx = 2\cdot\frac{1}{2}\log 2 = \log 2$ であることと

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)' \tan x dx = \left[\frac{1}{2}\tan^2 x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}(1-0)$$

$$= \frac{1}{2}$$

であることから　　$S_2 = \log 2 - \frac{1}{2}$　……(答)