2025年度 一般選抜 Ⅱ日程

数 学

Ⅰ 解答

(1) 1 —③　2・3 —①・⑨　4 —②　5 —①　6 —②
(2) 7 —②　8 —③　9 —①

解説

《式の計算，整数部分と小数部分，必要条件・十分条件》

(1)
$$x+y=\frac{1}{3-\sqrt{7}}+\frac{1}{3+\sqrt{7}}$$
$$=\frac{(3+\sqrt{7})+(3-\sqrt{7})}{(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})}$$
$$=\frac{6}{2}=3 \quad \to 1$$

また

$$xy=\frac{1}{3-\sqrt{7}}\cdot\frac{1}{3+\sqrt{7}}$$
$$=\frac{1}{(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})}=\frac{1}{2}$$
$$(x-3y)(3x-y)=3x^2-10xy+3y^2$$
$$=3(x+y)^2-16xy$$
$$=3\cdot 3^2-16\cdot\frac{1}{2}=19 \quad \to 2,\ 3$$

次に，$x=\frac{1}{3-\sqrt{7}}=\frac{3+\sqrt{7}}{(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})}=\frac{3+\sqrt{7}}{2}$ だが，$2<\sqrt{7}<3$ より $\frac{5}{2}<\frac{3+\sqrt{7}}{2}<3$ であるから x の整数部分は　2　$\to 4$

小数部分は

$$x-2=\frac{3+\sqrt{7}}{2}-2$$

$=\dfrac{\sqrt{7}-1}{2}$　→5，6

(2)　命題 $q \Longrightarrow r$ は偽である。反例 $a=b=1$

命題 $r \Longrightarrow q$ は真である。なぜなら，$a=4m$，$b=2n$（m，n は自然数）と表すと $a+b=2(2m+n)$ より $a+b$ は偶数だからである。

以上より

q は r であるための必要条件であるが，十分条件ではない。→7

命題 $q \Longrightarrow r$ は偽であるから，その対偶 $\overline{r} \Longrightarrow \overline{q}$ も偽である。

命題 $r \Longrightarrow q$ は真であるから，その対偶 $\overline{q} \Longrightarrow \overline{r}$ も真である。

以上より

$\overline{q}$ は $\overline{r}$ であるための十分条件であるが，必要条件ではない。→8

「p かつ q」のとき，$a=4M$，$a+b=2N$（M，N は自然数）と表せるので

$b=2N-a=2N-4M=2(N-2M)$

であるから b は偶数となる。したがって

命題「p かつ q」$\Longrightarrow r$ は真である。

r のとき，$a=4K$，$b=2L$（K，L は自然数）と表せるので，$a+b=2(2K+L)$ は偶数である。したがって

命題 $r \Longrightarrow$「p かつ q」は真である。

以上より　「p かつ q」は r であるための必要十分条件である。→9

Ⅱ 解答

(1) **10・11**—②・③　**12**—⑨

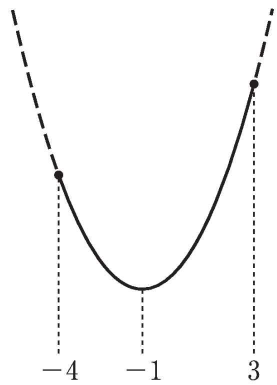
(2) **13**—③　**14**—②

(3) **15**—①　**16**—⑦　**17**—①　**18**—⑤　**19**—②　**20**—⑤　**21**—②　**22**—⑦

解説

《2次関数の最大・最小，放物線と x 軸との共有点》

(1)　$f(x)=2(x+1)^2-9$ より，$y=f(x)$ の $-4 \leqq x \leqq 3$ におけるグラフは右図のとおりである。



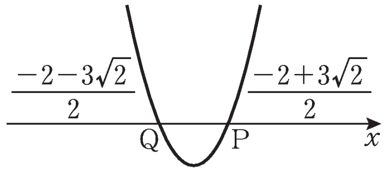
したがって

最大値は　$f(3)=23$　→10，11

最小値は　$f(-1)=-9$　→12

(2)　$f(x)=0$ の解は

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{(-2)^2-2\cdot(-7)}}{2}$$
$$=\frac{-2\pm3\sqrt{2}}{2}$$



であり，これらがP，Qのx座標である。したがって，線分PQの長さは

$$\mathrm{PQ}=\frac{-2+3\sqrt{2}}{2}-\frac{-2-3\sqrt{2}}{2}$$
$$=3\sqrt{2}\quad\to 13,\ 14$$

(3)　$y=g(x)$ のグラフの頂点の座標は　　$(-1+a,\ -9+(a+2))$

すなわち　　$(-1+a,\ a-7)$

したがって

$$g(x)=2\{x-(-1+a)\}^2+a-7$$
$$=2(x+1-a)^2+a-7\quad\to 15,\ 16$$
$$g(0)=2(1-a)^2+a-7$$
$$=2a^2-3a-5$$
$$=(a+1)(2a-5)$$

より，$g(0)>0$ となるのは

$$a<-1,\ \frac{5}{2}<a\quad\to 17\sim19$$

次に，$y=g(x)$ のグラフは下に凸で，軸は直線 $x=a-1$，頂点の座標は $(a-1,\ a-7)$ であるから，x 軸の正の部分と2点で交わるのは

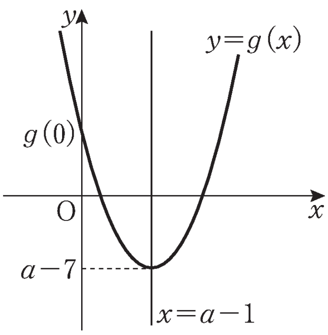
(i)頂点の y 座標 $a-7<0$　(ii)軸について $a-1>0$　(iii)$g(0)>0$

となるときである。

(i)より　　$a<7$

(ii)より　　$a>1$

(iii)より　　$a<-1,\ \frac{5}{2}<a$



であるから，共通部分をとって

$$\frac{5}{2}<a<7\quad\to 20\sim22$$

Ⅲ 解答　(1) **23**―⑤　**24**―⑨　**25**―②　**26**―②

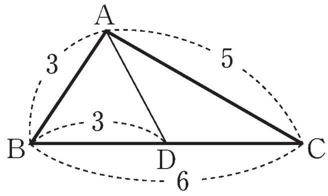
(2) **27**―⑦　**28**―⑤　**29**―⑦　**30**―⑨　**31**―⑦

32・33―③・②

解説

《余弦定理，方べきの定理，メネラウスの定理》

(1)　△ABC において，余弦定理より



$$\cos\angle ABC=\frac{BA^2+BC^2-AC^2}{2\cdot BA\cdot BC}$$

$$=\frac{3^2+6^2-5^2}{2\cdot 3\cdot 6}$$

$$=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}\quad\rightarrow 23,\ 24$$

また

$$BD=\frac{1}{2}BC=3$$

△ABD において，余弦定理より

$$AD^2=BA^2+BD^2-2\cdot BA\cdot BD\cos\angle ABC$$

$$=3^2+3^2-2\cdot 3\cdot 3\cdot\frac{5}{9}=8$$

したがって　　$AD=\sqrt{8}=2\sqrt{2}\quad\rightarrow 25,\ 26$

(2)　方べきの定理より

$$CB\cdot CD=CA\cdot CE$$

$$6\cdot 3=5\cdot CE\qquad CE=\frac{18}{5}$$

よって　　$AE=CA-CE$

$$=5-\frac{18}{5}=\frac{7}{5}\quad\rightarrow 27,\ 28$$

次に，△ACD と直線 EB についてメネラウスの定理より

$$\frac{AF}{FD}\cdot\frac{DB}{BC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$$

$$\frac{AF}{FD}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{18}{7}=1$$

$$\frac{AF}{FD}=\frac{7}{9}\quad\rightarrow 29,\ 30$$

以上より

$$\triangle \mathrm{ABF}=\frac{7}{9+7}\triangle \mathrm{ABD}$$
$$=\frac{7}{16}\left(\frac{1}{2}\triangle \mathrm{ABC}\right)$$
$$=\frac{7}{32}\triangle \mathrm{ABC}$$

よって　(△ABF の面積)：(△ABC の面積)＝7：32　→ 31～33

Ⅳ ─ 解答

34─④　**35**─③　**36**─③　**37**─⑤　**38**─④　**39**─⑤
40─⑧　**41**─②　**42**─⑤　**43**─⑤

解説

《2倍角の公式，三角関数の合成，半角の公式》

$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$，$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ より

$$\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2},\quad \sin\theta\cos\theta=\frac{\sin 2\theta}{2}$$

であるから

$$f(\theta)=6\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)+8\left(\frac{\sin 2\theta}{2}\right)$$
$$=4\sin 2\theta+3\cos 2\theta+3 \quad \to 34\sim 36$$

これは

$$f(\theta)=\sqrt{4^2+3^3}\sin(2\theta+\alpha)+3$$
$$=5\sin(2\theta+\alpha)+3 \quad \to 37$$

と変形できる。ただし，α は $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=\frac{4}{5}$ を満たす，すなわち

$\cos\alpha=\frac{4}{5}$ を満たす鋭角である。 → 38，39

ここで θ のとりうる値の範囲は $0\leqq\theta\leqq\pi$ であるから

$$\alpha\leqq 2\theta+\alpha\leqq 2\pi+\alpha$$

より，$\sin(2\theta+\alpha)$ のとりうる値の範囲は

$$-1\leqq\sin(2\theta+\alpha)\leqq 1$$

よって，$f(\theta)$ の最大値は　$5+3=8$　→ 40

このとき，$2\theta+\alpha=\frac{\pi}{2}$ である。このときの $\cos\theta$ について，$2\theta=\frac{\pi}{2}-\alpha$

であることから

$$\cos 2\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha=\frac{3}{5}$$

　このとき

$$\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}=\frac{1+\frac{3}{5}}{2}=\frac{4}{5}$$

　ここで

$$\theta=\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2} \quad \text{かつ} \quad 0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$$

であるから $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ となるので，$\frac{1}{\sqrt{2}}<\cos\theta<1$ である。

　よって

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5} \quad \to 41\sim 43$$

別解　$f(\theta)$ を最大にする θ における $\cos\theta$ の値については，以下のように求めることもできる。

　$2\theta+\alpha=\frac{\pi}{2}$ より，$\theta=\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}$ であるから

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\\&=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\alpha}{2}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\end{aligned}$$

　ここで，半角の公式より

$$\begin{aligned}\cos^2\frac{\alpha}{2}&=\frac{1+\cos\alpha}{2}\\&=\frac{1+\frac{4}{5}}{2}=\frac{9}{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin^2\frac{\alpha}{2}&=\frac{1-\cos\alpha}{2}\\&=\frac{1-\frac{4}{5}}{2}=\frac{1}{10}\end{aligned}$$

αが鋭角より $\dfrac{\alpha}{2}$ は鋭角であるから $\cos\dfrac{\alpha}{2}>0$，$\sin\dfrac{\alpha}{2}>0$ である。

したがって

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{9}{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1}{10}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

よって

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}+\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$
$$=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{10}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

V　解答

(1) 44—⑤

(2) 45—①

(3) 46—②　**47**—②　**48**—③　**49**—⑤　**50**—③　**51・52**—②・⑩　**53**—③

解説

《3次関数のグラフと接線，定積分と面積》

(1)　$f'(x)=3x^2-4x+1$

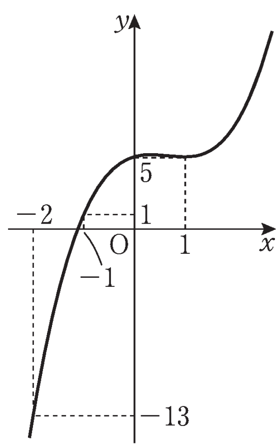
$=(3x-1)(x-1)$

であるから，右の増減表より

x	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	＋	0	－	0	＋
$f(x)$	↗	極大	↘	5	↗

$f(x)$ の極小値は　$f(1)=5$　→44

(2)　$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。



x 軸との共有点の個数は1個であるから，$f(x)=0$ の実数解の個数は　1個　→45

(3)　接点の x 座標を t として，接線の傾きが5であることから

$f'(t)=5$

よって

$3t^2-4t+1=5$

$3t^2-4t-4=0$

$(t-2)(3t+2)=0$

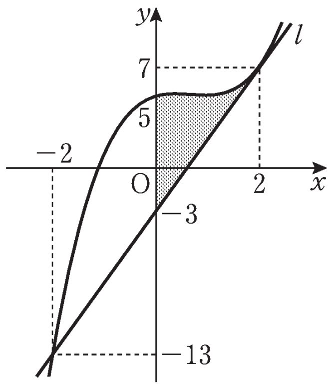
よって　　$t=2,\ -\dfrac{2}{3}$　→46〜48

$t=2$ のときを考えて，$f(2)=7$ より，$(2,\ 7)$ における C の接線 l の傾きは5となり，その方程式は

$$y-7=5(x-2)$$

すなわち　　$y=5x-3$　→49，50

右図より，求める面積 S は



$$\begin{aligned}S&=\int_0^2\{(x^3-2x^2+x+5)-(5x-3)\}dx\\&=\int_0^2(x^3-2x^2-4x+8)dx\\&=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-2x^2+8x\right]_0^2\\&=\left(4-\frac{16}{3}-8+16\right)-0\\&=\frac{20}{3}\end{aligned}$$

→51〜53