数　学

Ⅰ　解答

(1) 1・2―①・⑨　3・4―⑤・⑦　5―③
(2) 6―⑤　7―③　8―④　9―⑥　10―⑤
(3) 11―③　12―⑨　13・14―①・⑩

解説

《図形と計量》

(1)　余弦定理より

$$BC^2=2^2+3^2-2\cdot2\cdot3\cos120^\circ$$

$$=13-12\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=19$$

よって　　$BC=\sqrt{19}$　→1，2

また，△ABC の外接円の半径を R として正弦定理より

$$\frac{BC}{\sin120^\circ}=2R$$

$$R=\frac{\sqrt{19}}{2\cdot\sin120^\circ}=\frac{\sqrt{19}}{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{57}}{3}$$　→3～5

(2)　$\triangle ABC=\triangle ABD+\triangle ACD$

$$=\frac{1}{2}\cdot2\cdot x\sin60^\circ+\frac{1}{2}\cdot3\cdot x\sin60^\circ$$

$$=x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3x}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{5\sqrt{3}}{4}x$$　→6～8

一方

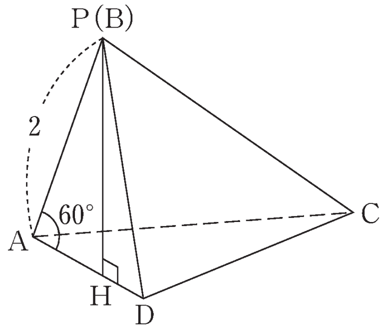
$$\triangle ABC = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\sin 120^\circ$$

$$= 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

より

$$\frac{5\sqrt{3}}{4}x = \frac{3\sqrt{3}}{2} \qquad \therefore \quad x = \frac{6}{5} \quad \to 9,\ 10$$

(3)　四面体 PADC の体積が最大となるとき，面 PAD が面 ADC に垂直となるので，点 P と面 ADC の距離は，点 P すなわち点 B から直線 AD に下ろした垂線 BH の長さに等しい。



$\angle BAH = 60^\circ$ より

$$BH = BA\sin 60^\circ = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \sqrt{3} \quad \to 11$$

ここで

$$\triangle ADC = \frac{1}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot 3\sin 60^\circ$$

$$= \frac{9}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{10}$$

よって，四面体 PADC の体積の最大値は

$$\frac{1}{3}\cdot\triangle ADC\cdot BH = \frac{1}{3}\cdot\frac{9\sqrt{3}}{10}\cdot\sqrt{3}$$

$$= \frac{9}{10} \quad \to 12\sim 14$$

Ⅱ　解答

(1) 15・16—⑤・⑥　**17・18・19**—①・④・⑩
(2)(i) 20—⑤　**21・22**—②・⑧
(ii) 23—④　**24・25**—②・①　**(iii) 26**—⑤　**27・28**—②・①

解説

《辞書式配列，条件付き確率》

(1)　3 桁の整数が 5 の倍数となるのは，一の位が 5 となるときである。百，十の位の選び方は，残りの 8 つの数から 2 つを選んで並べる

$_8P_2=56$ 通り

であるから，このような数は56個である。 →15，16

次に，750より大きい整数は

$75\square$の形のものが　7個

$76\square$の形のものが　7個

$78\square$の形のものが　7個

$79\square$の形のものが　7個

$8\square\square$の形のものが　$_8P_2=56$ 個

$9\square\square$の形のものが　$_8P_2=56$ 個

よって，750より大きい数は

$7\cdot4+56\cdot2=140$ 個　→17〜19

(2)(i)　$b=4$ となるのは，4より小さい数を1つ，4より大きい数を1つ取り出すときだから，$3\times5=15$ 通りである。よって，求める確率は

$$\frac{15}{{}_9C_3}=\frac{15}{84}=\frac{5}{28}$$ →20〜22

(ii)　$b=\dfrac{a+c}{2}$ となるのは

$b=2$ で　$(a,\ c)=(1,\ 3)$

$b=3$ で　$(a,\ c)=(1,\ 5),\ (2,\ 4)$

$b=4$ で　$(a,\ c)=(1,\ 7),\ (2,\ 6),\ (3,\ 5)$

$b=5$ で　$(a,\ c)=(1,\ 9),\ (2,\ 8),\ (3,\ 7),\ (4,\ 6)$

$b=6$ で　$(a,\ c)=(3,\ 9),\ (4,\ 8),\ (5,\ 7)$

$b=7$ で　$(a,\ c)=(5,\ 9),\ (6,\ 8)$

$b=8$ で　$(a,\ c)=(7,\ 9)$

の $1+2+3+4+3+2+1=16$ 通りであるから，求める確率は

$$\frac{16}{{}_9C_3}=\frac{16}{84}=\frac{4}{21}$$ →23〜25

(iii)　$a=2$ となる事象を A，$c=8$ となる事象を C とすると，求める確率は

$$P_A(C)=\frac{P(A\cap C)}{P(A)}$$

$P(A)$ について，b，c は3，4，5，6，7，8，9の7つから2つを選ぶ $_7C_2=21$ 通りであるから

$$P(A)=\frac{21}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{21}{84}=\frac{1}{4}$$

$P(A\cap C)$ について，b は 3，4，5，6，7 から 1 つを選ぶ 5 通りであるから

$$P(A\cap C)=\frac{5}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{5}{84}$$

よって

$$P_A(C)=\frac{P(A\cap C)}{P(A)}=\frac{\frac{5}{84}}{\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{5}{21} \quad \to 26\sim 28$$

III 解答

(1) **29**—② **30**—⑤ **31**—③ **32**—② **33**—① **34**—③ **35**—④

(2) **36**—② **37**—③ **38**—⑦ **39・40**—②・⑧

解説

《高次方程式，多項式の割り算，解と係数の関係》

(1) $x=1+2i$ を変形して　　$x-1=2i$

この両辺を 2 乗して

$$(x-1)^2=(2i)^2$$

$$x^2-2x+1=-4 \qquad x^2-2x+5=0$$

これが求める方程式である。 $\to 29$，30

$f(x)$ を x^2-2x+5 で割ると，右の筆算より

$$\begin{array}{r}
x-3 \\
x^2-2x+5\,\big)\,\overline{x^3-5x^2+13x-14} \\
\underline{x^3-2x^2+5x} \\
-3x^2+8x-14 \\
\underline{-3x^2+6x-15} \\
2x+1
\end{array}$$

商は $x-3$，余りは $2x+1$ $\to 31\sim 33$

よって，$f(x)=(x^2-2x+5)(x-3)+2x+1$ と表せるので，$x=1+2i$ のとき $x^2-2x+5=0$ に注意して

$$f(1+2i)=0\cdot(1+2i-3)+2(1+2i)+1$$

$$=3+4i \quad \to 34，35$$

(2) $f(2)=8-20+26-14=0$ より，$f(x)=0$ は $x=2$ を解にもつ。 $\to 36$

このとき，$f(x)=(x-2)(x^2-3x+7)$ であるから，α，β は $x^2-3x+7=0$ の2解である。したがって，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=7 \quad \rightarrow 37,\ 38$$

このとき

$$\begin{aligned}
&(\alpha^2-\alpha+1)(\beta^2-\beta+1)\\
&=\alpha^2\beta^2-\alpha^2\beta-\alpha\beta^2+\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta-\alpha-\beta+1\\
&=(\alpha\beta)^2-\alpha\beta(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1\\
&=7^2-7\cdot3+3^2-7-3+1=28 \quad \rightarrow 39,\ 40
\end{aligned}$$

参考　$(\alpha^2-\alpha+1)(\beta^2-\beta+1)$ の値を求める別の計算方法は以下の通り。

α，β は $x^2-3x+7=0$ の2解であるから

$$\alpha^2-3\alpha+7=0 \quad かつ \quad \beta^2-3\beta+7=0$$

すなわち

$$\alpha^2=3\alpha-7 \quad かつ \quad \beta^2=3\beta-7$$

このことを用いると

$$\begin{aligned}
&(\alpha^2-\alpha+1)(\beta^2-\beta+1)\\
&=\{(3\alpha-7)-\alpha+1\}\{(3\beta-7)-\beta+1\}\\
&=(2\alpha-6)(2\beta-6)\\
&=4\{\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+9\}\\
&=4(7-3\cdot3+9)=28
\end{aligned}$$

Ⅳ 解答

(1) 41—③　**42**—⑦　**43・44**—①・②
(2) 45・46—①・⑥　**47・48・49**—⑤・③・②
50・51—①・⑦　**52**—③

解説

《指数関数，常用対数，桁数と最高位の数》

(1)
$$a=\sqrt{\frac{1}{3}}=3^{-\frac{1}{2}}$$

$$b=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^2}=3^{-\frac{2}{3}}$$

$$c=\sqrt[4]{3^3}=3^{\frac{3}{4}}$$

$-\dfrac{2}{3}<-\dfrac{1}{2}<\dfrac{3}{4}$ かつ底3は1より大きいので

$3^{-\frac{2}{3}}<3^{-\frac{1}{2}}<3^{\frac{3}{4}}$

すなわち　　$b<a<c$　→41

また

$$3^p=\frac{bc}{a}=3^{-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\left(-\frac{1}{2}\right)}=3^{\frac{7}{12}}$$

すなわち　　$p=\dfrac{7}{12}$　→42〜44

(2)　$\log_{10}A=20\log_{10}3+10\log_{10}5$

$=20\log_{10}3+10\log_{10}\dfrac{10}{2}$

$=20\log_{10}3+10(1-\log_{10}2)$

$=9.542+10-3.010$

$=16.532$　→45〜49

よって，$10^{16}<A<10^{17}$ であるから，A は17桁の整数である。

→50，51

また，$A=10^{0.532}\times10^{16}$ であり

$\log_{10}3=0.4771$，$\log_{10}4=2\log_{10}2=0.6020$

から

$\log_{10}3<0.532<\log_{10}4$

すなわち　　$3<10^{0.532}<4$

よって，$3\times10^{16}<A<4\times10^{16}$ より　　$M=3$　→52

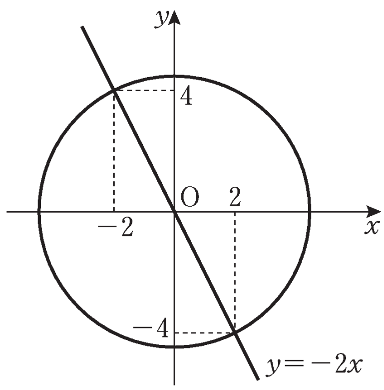
Ⅴ 解答

(1) 53—②　**54**—④　**55**—①　**56**—②　**57**—⑤

(2) 58—③　**59・60**—①・⑩　**61**—⑧

解説

《図形と方程式，領域と最大・最小》



(1)　$x^2+y^2=20$，$y=-2x$ から y を消去して

$x^2+(-2x)^2=20$

$x^2=4$　　∴　$x=\pm2$

$y=-2x$ より

$(x,\ y)=(2,\ -4)$，$(-2,\ 4)$

よって，第 2 象限にある交点の座標は　　$(-2,\ 4)$　→53，54

この点における円 C の接線の方程式は

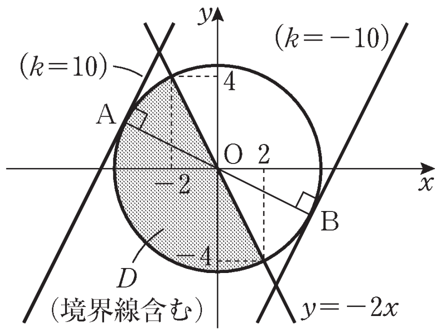
$$-2x+4y=20$$

$$\therefore\quad y=\frac{1}{2}x+5$$　→55〜57

(2)　円 C の内部は $x^2+y^2 \leqq 20$ で表され，直線 l の下側部分は

$$y \leqq -2x$$

すなわち　　$2x+y \leqq 0$　→58



$Y-2X=k$ とおくと，点 $(X,\ Y)$ が D 内を動くとき，k のとりうる値の範囲は，直線 $y-2x=k$ が領域 D と共有点をもつような k の値の範囲である。

直線 $y-2x=k$，すなわち $2x-y+k=0$ が円 $C：x^2+y^2=20$ に接するのは $2x-y+k=0$ と円 C の中心 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ の距離 d が C の半径 $\sqrt{20}$ に等しいときである。

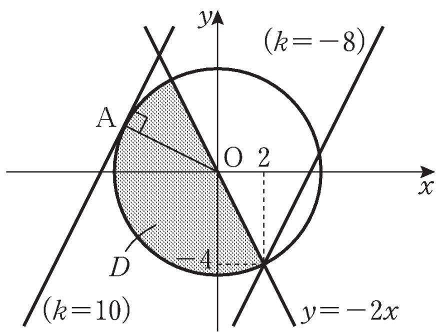
$$d=\frac{|0-0+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

であることから，$\dfrac{|k|}{\sqrt{5}}=\sqrt{20}$ より

$$|k|=10 \qquad \therefore\quad k=\pm 10$$

$k=10$ のとき，接点を A として半径 OA は接線 $2x-y+10=0$ に垂直より，OA の傾きは $-\dfrac{1}{2}$ であるから，点 A は領域 D に含まれる。



$k=-10$ のとき，接点を B として同様に半径 OB の傾きは $-\dfrac{1}{2}$ であるから，点 B は領域 D に含まれない。

以上の議論と右図より，k が最大となるのは点 A で円 C に接するときで，その値は

$$k=10$$　→59，60

また，k が最小となるのは点 $(2,\ -4)$ を通るときで，その値は

$$k=-4-4=-8 \quad \to 61$$