数　学

Ⅰ 解答

(1)ア. $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$　イ. $-\sqrt{5}$　ウ. $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2},\ -\dfrac{1}{4}\right)$

(2)エ. $\sqrt{2}$　オ. $5-\sqrt{2}<r<5+\sqrt{2}$　カ. $3\sqrt{3}$

(3)(i)キ. $4\sqrt{6}$　(ii)ク. $\dfrac{7}{8}$　ケ. $\dfrac{\sqrt{15}}{8}$

(4)コ. $(n,\ 10-n)$　サ. $\dfrac{105}{512}$　シ. $\dfrac{11}{64}$

(5)ス. $-(-2)^{n+1}-1$　セ. $\dfrac{(-2)^{n+1}}{3}-n+\dfrac{2}{3}$　ソ. -503

Ⅱ 解答

(1)　$f'(x)=-2x+2$ なので，求める接線の接点の座標を $(a,\ -a^2+2a)$ とすると，接線の方程式は

$$y-(-a^2+2a)=(-2a+2)(x-a)$$

すなわち　$y=(-2a+2)x+a^2$

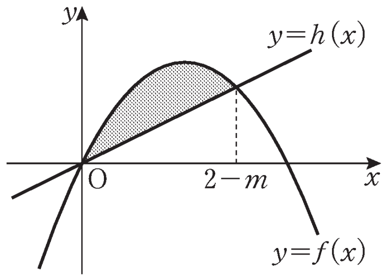
この直線が点 $(3,\ 6)$ を通るので

$$6=(-2a+2)\cdot 3+a^2 \qquad a=0,\ 6$$

よって　$a=0$ のとき $y=2x$，$a=6$ のとき $y=-10x+36$　……(答)

(2)　$y=f(x)$ と $y=h(x)$ の交点の x 座標は，方程式 $-x^2+2x=mx$ を解いて $x=0,\ 2-m$ である（異なる2解をもつので $m\neq 2$）。

(ア)　$0<2-m$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と $y=h(x)$ は右図のようになるので，この2曲線で囲まれる面積 S_1 は



$$S_1=\int_0^{2-m}\{(-x^2+2x)-mx\}dx$$

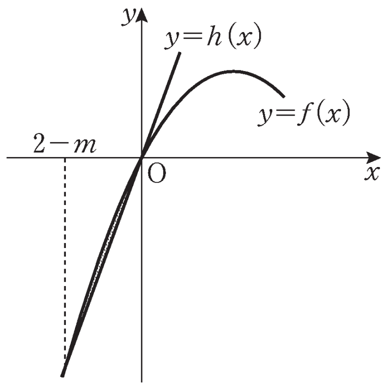
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{2-m}{2}x^2\right]_0^{2-m}$$

$=\dfrac{(2-m)^3}{6}$

この値が $\dfrac{32}{3}$ となればよいので

$$\frac{(2-m)^3}{6}=\frac{32}{3} \qquad m=-2$$

(イ) $2-m<0$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と $y=h(x)$ は右図のようになるので，この 2 曲線で囲まれる面積 S_2 は



$$S_2=\int_{2-m}^{0}\{(-x^2+2x)-mx\}dx$$

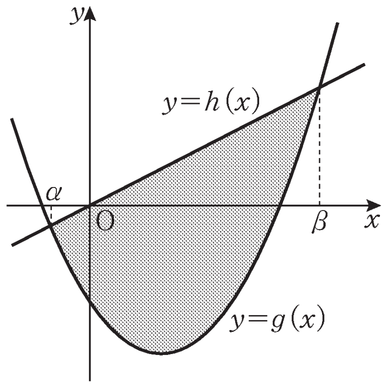
$$=-\frac{(2-m)^3}{6}$$

この値が $\dfrac{32}{3}$ となればよいので

$$-\frac{(2-m)^3}{6}=\frac{32}{3} \qquad m=6$$

よって　　$m=6,\ -2$　……(答)

(3)　2 曲線 $y=g(x)$ と $y=h(x)$ は右図のようになる。これらの交点の x 座標は，方程式 $x^2-\dfrac{3}{2}x-1=mx$ の解であり，これを解くと



$$x=\frac{3+2m\pm\sqrt{(2m+3)^2+16}}{4} \quad \cdots\cdots(*)$$

となる。この 2 解を α, β $(\alpha<\beta)$ とおくと，$y=g(x)$ と $y=h(x)$ で囲まれる図形の面積 T は

$$T=\int_{\alpha}^{\beta}\left\{mx-\left(x^2-\frac{3}{2}x-1\right)\right\}dx$$

$$=-\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=-\int_{\alpha}^{\beta}\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}dx$$

$$=-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{\alpha+\beta}{2}x^2+\alpha\beta x\right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$=-\frac{\beta^3-\alpha^3}{3}+\frac{\alpha+\beta}{2}(\beta^2-\alpha^2)-\alpha\beta(\beta-\alpha)$$

$$=\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$$

となるので，$\beta-\alpha$ が最小となるような m を求めればよい。

（＊）より，$\beta-\alpha=\dfrac{\sqrt{(2m+3)^2+16}}{2}$ であるから，$\beta-\alpha$ は $m=-\dfrac{3}{2}$ のとき最小となる。

よって　　$m=-\dfrac{3}{2}$　……(答)