

数 学

Ⅰ 解答 (1) ア. 15 イ. (36, -22) ウ. (-2, 9)
エ. (10, -3)

(2) オ. $t \geq 2$ カ. $t^2 - 6t + 3$ キ. -6

(3) ク. $\frac{3}{11}$ ケ. $\frac{16}{55}$ コ. $\frac{36}{55}$

Ⅱ 解答 (1) $f'(x) = 3x^2 - 10x + 3 = (3x - 1)(x - 3)$ より,
 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	...	$\frac{1}{3}$	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{13}{27}$ 極大	↘	-9 極小	↗

直線 l は原点 O で曲線 $y = f(x)$ に接するので, l の傾きは $f'(0) = 3$
よって, 直線 l の方程式は $y = 3(x - 0) + 0$ より

$$y = 3x \quad \dots\dots (\text{答})$$

直線 l と曲線 $y = f(x)$ との交点の x 座標は

$$3x = x^3 - 5x^2 + 3x \quad x = 0, 5$$

区間 $0 \leq x \leq 5$ では $3x \geq x^3 - 5x^2 + 3x$ なので, 求める面積 S は

$$S = \int_0^5 \{3x - (x^3 - 5x^2 + 3x)\} dx = \frac{625}{12} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(2) 増減表より, 極大値は $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{13}{27}$, 極小値は $f(3) = -9$ である。極
値をとる x はいずれも区間 $-2 \leq x \leq 4$ に含まれているので, 極値とこの

区間の両端での値 $f(-2)$, $f(4)$ を比較すると

$$f(-2) = -34 < -9, \quad f(4) = -4 < \frac{13}{27}$$

よって 最大値は $\frac{13}{27}$, 最小値は -34 ……(答)

Ⅲ 解答 (1) $\triangle ABC$ に対する余弦定理より

$$\cos \angle ABC = \frac{25 + 64 - 49}{2 \cdot 8 \cdot 5} = \frac{1}{2}$$

よって $\angle ABC = 60^\circ$ ……(答)

また, $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ より, $\triangle ABC$ の面積 S は

$$S = 5 \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = 10\sqrt{3} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2) $\angle CHB = 90^\circ$ より, $\triangle CBH$ は 3 つの角が 30° , 60° , 90° の直角三角形なので, 3 辺の長さの比は

$$BH : CB : CH = 1 : 2 : \sqrt{3}$$

よって, $CB = 8$ より $BH = 4$ ……(答)

また, $AB = 5$ より $AH = 1$, M が中点であることより $MC = 4$

$\triangle ABM$ と直線 CH に対するメネラウスの定理より,

$$\frac{BC}{CM} \cdot \frac{MP}{PA} \cdot \frac{AH}{BH} = 1 \text{ が成り立つ。}$$

$$\text{よって, } \frac{8}{4} \cdot \frac{MP}{PA} \cdot \frac{1}{4} = 1 \text{ より } \frac{MP}{PA} = 2 \quad \dots\dots(\text{答})$$

(3) (2)の結果より $AP : PM = 1 : 2$ なので, $\triangle APH$ と $\triangle AMH$ の面積比は $1 : 3$ である。

また, $AH : HB = 1 : 4$ より, $\triangle AMH$ と $\triangle AMB$ の面積比は $1 : 5$ であり, $\triangle AMB$ の面積は $\triangle ABC$ の面積の $\frac{1}{2}$ である。

よって, $\triangle APH$ の面積は

$$10\sqrt{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \dots\dots(\text{答})$$