数 学

I 解答

(1)**ア.** 15 **イ.** (36, -22) **ウ.** (-2, 9) **エ.** (10, -3)

(2)**オ.** $t \geqq 2$ **カ.** t^2-6t+3 **キ.** -6

(3)**ク.** $\dfrac{3}{11}$ **ケ.** $\dfrac{16}{55}$ **コ.** $\dfrac{36}{55}$

II 解答

(1) $f'(x)=3x^2-10x+3=(3x-1)(x-3)$ より，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{13}{27}$ 極大	↘	-9 極小	↗

直線 l は原点Oで曲線 $y=f(x)$ に接するので，l の傾きは　$f'(0)=3$
よって，直線 l の方程式は $y=3(x-0)+0$ より

$y=3x$ ……(答)

直線 l と曲線 $y=f(x)$ との交点の x 座標は

$3x=x^3-5x^2+3x$　　$x=0,\ 5$

区間 $0 \leqq x \leqq 5$ では $3x \geqq x^3-5x^2+3x$ なので，求める面積 S は

$$S=\int_0^5 \{3x-(x^3-5x^2+3x)\}dx=\frac{625}{12} \quad \text{……(答)}$$

(2) 増減表より，極大値は $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{13}{27}$，極小値は $f(3)=-9$ である。極値をとる x はいずれも区間 $-2 \leqq x \leqq 4$ に含まれているので，極値とこの区間の両端での値 $f(-2)$，$f(4)$ を比較すると

$$f(-2)=-34<-9,\ f(4)=-4<\frac{13}{27}$$

よって　最大値は $\frac{13}{27}$，最小値は -34 ……(答)

III 解答 (1) △ABC に対する余弦定理より

$$\cos\angle ABC=\frac{25+64-49}{2\cdot 8\cdot 5}=\frac{1}{2}$$

よって　$\angle ABC=60^\circ$ ……(答)

また，$\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ より，△ABC の面積 S は

$$S=5\times 8\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}=10\sqrt{3}$$ ……(答)

(2) $\angle CHB=90^\circ$ より，△CBH は 3 つの角が 30°，60°，90° の直角三角形なので，3 辺の長さの比は

$$BH : CB : CH=1 : 2 : \sqrt{3}$$

よって，CB＝8 より　BH＝4 ……(答)

また，AB＝5 より AH＝1，M が中点であることより MC＝4

△ABM と直線 CH に対するメネラウスの定理より，

$\frac{BC}{CM}\cdot\frac{MP}{PA}\cdot\frac{AH}{BH}=1$ が成り立つ。

よって，$\frac{8}{4}\cdot\frac{MP}{PA}\cdot\frac{1}{4}=1$ より　$\frac{MP}{PA}=2$ ……(答)

(3) (2)の結果より AP : PM＝1 : 2 なので，△APH と △AMH の面積比は 1 : 3 である。

また，AH : HB＝1 : 4 より，△AMH と △AMB の面積比は 1 : 5 であり，△AMB の面積は △ABC の面積の $\frac{1}{2}$ である。

よって，△APH の面積は

$$10\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$ ……(答)