

数 学

- ① 解答 (1) (ア) 8 (イ) $\pi - 3$ (ウ) $k + 1 - \sqrt{k^2 + k + 1}$ (エ) $\frac{2025}{4}$
- (2) (オ) $\frac{3}{4}x$ (カ) $\frac{x-3}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{12-x}{3x}\overrightarrow{AC}$ (キ) 4 (ク) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
- (3) (ケ) $\frac{3}{32}$ (コ) $\frac{2}{5}$ (サ) $\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{4}$ (シ) $\frac{1}{3}$

- ② 解答 (1) $f(x) = 2x - \sqrt{1-x^2}$
 $= 2x - (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = 2 - \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \times (-2x) = 2 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{1-x^2} + x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$f'(x) = 0$ のとき

$$2\sqrt{1-x^2} = -x \geq 0 \quad x \leq 0$$

両辺を 2 乗して

$$4(1-x^2) = x^2 \quad x^2 = \frac{4}{5}$$

$$x \leq 0 \text{ であるので } x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

よって、 $f(x)$ の増減表は右のようになる。

これより

$$\left. \begin{array}{ll} x = -\frac{2}{\sqrt{5}} \text{ のとき} & \text{最小値 } -\sqrt{5} \\ x = 1 \text{ のとき} & \text{最大値 } 2 \end{array} \right\} \dots\dots (\text{答})$$

x	-1	...	$-\frac{2}{\sqrt{5}}$	...	1
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	-2	$\searrow$	$-\sqrt{5}$	$\nearrow$	2

(2) 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \{ (x+1) - (2x - \sqrt{1-x^2}) \} dx \\ &= \int_0^1 (1-x + \sqrt{1-x^2}) dx \\ &= \int_0^1 (1-x) dx + \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \end{aligned}$$

ここで

$$\int_0^1 (1-x) dx = \left[x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

また, $x = \sin\theta \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$ とおくと

$$dx = \cos\theta d\theta \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \rightarrow 1 \\ \theta & 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{array}$$

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{\cos^2\theta} = \cos\theta$$

よって

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \cdot \cos\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \times \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

これより

$$S = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(3) $2x - \sqrt{1-x^2} = 0$ のとき

$$\sqrt{1-x^2} = 2x \geq 0 \quad x \geq 0$$

両辺を 2 乗して

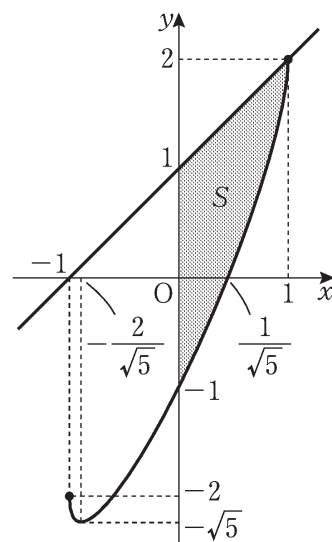
$$1-x^2 = 4x^2$$

$x \geq 0$ であるので

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

求める立体の体積を V_x とすると

$$V_x = \pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}} (2x - \sqrt{1-x^2})^2 dx$$



$$= \pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}} \{4x^2 - 4x\sqrt{1-x^2} + (1-x^2)\} dx$$

$$= \pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}} (1+3x^2) dx - 4\pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}} x\sqrt{1-x^2} dx$$

ここで

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}} (1+3x^2) dx = \left[x + x^3 \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{5\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{25}$$

また, $1-x^2=t$ とおくと

$$\begin{array}{c|c} x & 0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -2xdx = dt & \\ \hline t & 1 \rightarrow \frac{4}{5} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}} x\sqrt{1-x^2} dx &= \int_1^{\frac{4}{5}} t^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2} dt \right) = -\frac{1}{3} \times \left[t^{\frac{3}{2}} \right]_1^{\frac{4}{5}} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{8\sqrt{5}}{75} \end{aligned}$$

これより

$$V_x = \frac{6\sqrt{5}}{25} \pi - 4\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{8\sqrt{5}}{75} \right) = \frac{2\sqrt{5}-4}{3} \pi \quad \dots\dots (\text{答})$$

(4) $y=2x-\sqrt{1-x^2}$ とおくと

$$2x-y=\sqrt{1-x^2} \geq 0 \quad x \geq \frac{1}{2}y$$

両辺を 2 乗すると

$$4x^2 - 4xy + y^2 = 1 - x^2 \quad 5x^2 - 4xy + (y^2 - 1) = 0$$

$$x \geq \frac{1}{2}y \text{ より } \quad x = \frac{2y + \sqrt{5-y^2}}{5}$$

求める立体の体積を V_y とすると

$$\begin{aligned} V_y &= \pi \int_{-1}^2 \left(\frac{2y + \sqrt{5-y^2}}{5} \right)^2 dy - \frac{1}{3} \times (\pi \times 1^2) \times 1 \\ &= \frac{\pi}{25} \int_{-1}^2 \{4y^2 + 4y\sqrt{5-y^2} + (5-y^2)\} dy - \frac{1}{3} \pi \\ &= \frac{\pi}{25} \int_{-1}^2 (3y^2 + 5) dy + \frac{4\pi}{25} \int_{-1}^2 y\sqrt{5-y^2} dy - \frac{1}{3} \pi \end{aligned}$$

ここで

$$\int_{-1}^2 (3y^2+5)dy = \left[y^3+5y \right]_{-1}^2 = 24$$

また, $5-y^2=u$ とおくと

$$-2ydy=du \quad \begin{array}{c|c} y & -1 \rightarrow 2 \\ \hline u & 4 \rightarrow 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 y\sqrt{5-y^2}dy &= \int_4^1 u^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2}du \right) = -\frac{1}{3} \times \left[u^{\frac{3}{2}} \right]_4^1 \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{8}{3} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

これより

$$V_y = \frac{24}{25}\pi + \frac{28}{75}\pi - \frac{1}{3}\pi = \pi \quad \dots\dots(\text{答})$$

3

解答

(1) 曲線 C 上の任意の点の座標を (x, y) とする。

与えられた条件より

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2} : |4-x| = 1 : 2$$

$$2\sqrt{(x-1)^2+y^2} = |4-x|$$

両辺を 2 乗すると

$$4\{(x-1)^2+y^2\} = (x-4)^2$$

$$3x^2+4y^2=12 \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

これより, 曲線 C の方程式は

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2) $y=mx+n$ を(1)の①に代入して

$$3x^2+4(mx+n)^2=12$$

$$(4m^2+3)x^2+8mnx+(4n^2-12)=0 \quad \dots\dots\textcircled{2}$$

直線 l が曲線 C に接するとき, 2 次方程式②において, 判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = (4mn)^2 - (4m^2+3)(4n^2-12) = 0$$

$$4m^2-n^2+3=0$$

$$n > 0 \text{ より } n = \sqrt{4m^2+3} \quad \dots\dots(\text{答})$$

このとき, 直線 l の方程式は, $mx-y+\sqrt{4m^2+3}=0$ となるので, 原点

O との距離 d は

$$d = \frac{\sqrt{4m^2+3}}{\sqrt{m^2+1}} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(3) 直線 l が曲線 C に接するとき、直線 l と直交し、曲線 C に接する直線を l' とする。

$m \neq 0$ のとき、 l' の方程式は

$$y = -\frac{1}{m}x + n'$$

とおける。よって、直線 l' と原点 O の距離を d' とすると、(2)の結果より

$$d' = \frac{\sqrt{4\left(-\frac{1}{m}\right)^2+3}}{\sqrt{\left(-\frac{1}{m}\right)^2+1}} = \frac{\sqrt{3m^2+4}}{\sqrt{m^2+1}}$$

よって、 $m \neq 0$ すなわち長方形 PQRS の各辺が座標軸に平行でないとき

$$\begin{aligned} OP &= \sqrt{d^2 + d'^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{4m^2+3}}{\sqrt{m^2+1}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3m^2+4}}{\sqrt{m^2+1}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{7(m^2+1)}{m^2+1}} = \sqrt{7} \end{aligned}$$

また、 $m = 0$ のとき、長方形 PQRS の各辺が座標軸と平行になり

$$OP = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{7}$$

よって、長方形 PQRS の各辺が座標軸に平行でないときも、平行であるときも、求める面積は、OP を半径とする円の面積であるので

$$\pi \times (\sqrt{7})^2 = 7\pi \quad \dots\dots (\text{答})$$