数　学

I 解答

(1)**ア.** $2t^2-16t+3$　**イ.** $\dfrac{1}{16}\leqq t\leqq 8$　**ウ.** 3

(2)**エ.** -5　**オ.** 8　**カ.** -32　**キ.** 15

(3)**ク.** $\dfrac{9}{16}$　**ケ.** $\dfrac{129}{224}$　**コ.** $\dfrac{2}{5}$

(4)**サ.** $\dfrac{49\sqrt{3}}{4}$　**シ.** 60°　**ス.** 5　**セ.** $\dfrac{35}{8}$

II 解答

(1)　$f(x)=x^3-3x^2+ax+b$ より

$$f'(x)=3x^2-6x+a$$

$x=3$ で極値をとるので

$$f'(3)=9+a=0 \qquad \therefore \quad a=-9 \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

したがって，$f(3)=-27+b=-23$ であるから

$$b=4 \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　(1)より $f(x)=x^3-3x^2-9x+4$ であり，$f'(x)=3(x+1)(x-3)$ なので，増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	9	$\searrow$	-23	$\nearrow$

したがって，$f(x)$ は $x=-1$ で極大値 9 をとる。　……(答)

(3)　方程式 $f(x)=kx$ の異なる実数解の個数は，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=kx$ の共有点の個数に等しく，共有点の個数がちょうど2個になるのは，$y=kx$ が $y=f(x)$ の接線となるときである。

接点の x 座標を t とおいたとき，接線の方程式は

$$y=(3t^2-6t-9)(x-t)+t^3-3t^2-9t+4$$

これが原点 $(0,\ 0)$ を通るので

$$(t-2)(2t^2+t+2)=0 \qquad t=2$$

したがって，求める接線は　$y=-9x$

よって　$k=-9$　……(答)

また，$f(x)=-9x \Longleftrightarrow (x+1)(x-2)^2=0$ であるから，$y=f(x)$ と $y=-9x$ の接点以外の共有点の x 座標は

$$x=-1$$

したがって

$$S=\int_{-1}^{2}\{f(x)-(-9x)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{2}(x^3-3x^2+4)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+4x\right]_{-1}^{2}$$

$$=\frac{27}{4}$$　……(答)