

数 学

- I** — **解答** (1) **ア.** $2t^2 - 16t + 3$ **イ.** $\frac{1}{16} \leq t \leq 8$ **ウ.** 3
 (2) **エ.** -5 **オ.** 8 **カ.** -32 **キ.** 15
 (3) **ク.** $\frac{9}{16}$ **ケ.** $\frac{129}{224}$ **コ.** $\frac{2}{5}$
 (4) **サ.** $\frac{49\sqrt{3}}{4}$ **シ.** 60° **ス.** 5 **セ.** $\frac{35}{8}$

- II** — **解答** (1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + ax + b$ より
 $f'(x) = 3x^2 - 6x + a$

$x=3$ で極値をとるので

$$f'(3) = 9 + a = 0 \quad \therefore a = -9 \quad \dots\dots(\text{答})$$

したがって, $f(3) = -27 + b = -23$ であるから

$$b = 4 \quad \dots\dots(\text{答})$$

- (2) (1)より $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$ であり, $f'(x) = 3(x+1)(x-3)$ なので, 増減表は以下のようになる。

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	9	↘	-23	↗

したがって, $f(x)$ は $x=-1$ で極大値 9 をとる。……(答)

- (3) 方程式 $f(x) = kx$ の異なる実数解の個数は, 曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=kx$ の共有点の個数に等しく, 共有点の個数がちょうど 2 個になるのは, $y=kx$ が $y=f(x)$ の接線となるときである。

接点の x 座標を t とおいたとき, 接線の方程式は

$$y = (3t^2 - 6t - 9)(x - t) + t^3 - 3t^2 - 9t + 4$$

これが原点 $(0, 0)$ を通るので

$$(t - 2)(2t^2 + t + 2) = 0 \quad t = 2$$

したがって、求める接線は $y = -9x$

よって $k = -9$ ……(答)

また、 $f(x) = -9x \iff (x + 1)(x - 2)^2 = 0$ であるから、 $y = f(x)$ と $y = -9x$ の接点以外の共有点の x 座標は

$$x = -1$$

したがって

$$S = \int_{-1}^2 \{f(x) - (-9x)\} dx$$

$$= \int_{-1}^2 (x^3 - 3x^2 + 4) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x \right]_{-1}^2$$

$$= \frac{27}{4} \quad \dots\dots(\text{答})$$