数 学

Ⅰ 解答 (1)ア. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ イ. $1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ウ. $\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}$

(2)エ. 8 オ. $\dfrac{16}{33}$ カ. 36

(3)キ. 7 ク. 6 ケ. 7.5

(4)コ. -1 サ. $-\dfrac{2}{3}<x<4$ シ. $0<k<\dfrac{1}{2}$

Ⅱ 解答 (1) 与えられた2次方程式の判別式をDとすると，異なる2つの実数解をもつ条件は，$D>0$より

$$(k+1)^2-4\cdot1\cdot(-k^2+2k)>0$$

展開し整理して，$5k^2-6k+1>0$より

$$(5k-1)(k-1)>0$$

よって　$k<\dfrac{1}{5}$，$1<k$ ……①　……(答)

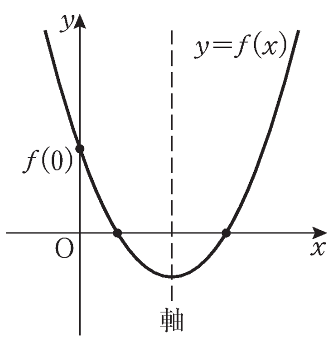
(2) $f(x)=x^2-(k+1)x-k^2+2k$とおくと

$$f(x)=\left(x-\frac{k+1}{2}\right)^2-\frac{(k+1)^2}{4}-k^2+2k$$

与えられた2次方程式が異なる2つの正の解をもつ。

$\Longleftrightarrow$ $y=f(x)$のグラフがx軸の正の部分と2交点をもつ。

$\Longleftrightarrow$ $D>0$　かつ　軸>0　かつ　$f(0)>0$



軸>0より

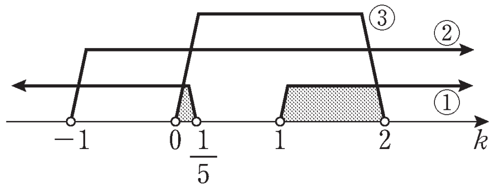
$$\frac{k+1}{2}>0 \qquad \therefore\quad k>-1 \quad ……②$$

$f(0)>0$より

$-k^2+2k>0 \qquad k(k-2)<0$

$\therefore\quad 0<k<2 \quad \cdots\cdots③$

①，②，③の共通範囲を求めて

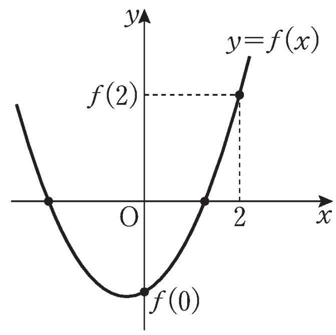


$0<k<\dfrac{1}{5}$，$1<k<2 \quad \cdots\cdots$(答)

(3)　与えられた２次方程式が負の解と２以下の正の解をもつ。

$\iff y=f(x)$ のグラフが x 軸の負の部分と２以下の正の部分で交点をもつ。

$\iff f(0)<0$　かつ　$f(2)\geqq 0$



$f(0)<0$ より，③から

$k<0,\ 2<k \quad \cdots\cdots④$

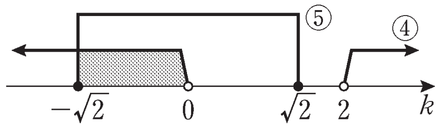
$f(2)\geqq 0$ より

$4-(k+1)\cdot 2-k^2+2k\geqq 0$

$k^2-2\leqq 0 \qquad (k+\sqrt{2})(k-\sqrt{2})\leqq 0$

$\therefore\quad -\sqrt{2}\leqq k\leqq \sqrt{2} \quad \cdots\cdots⑤$

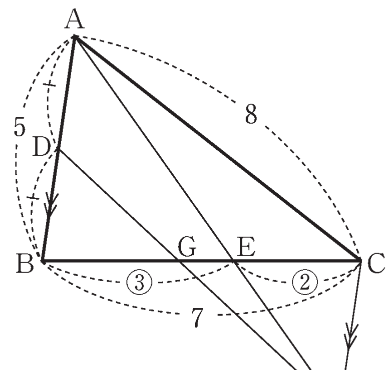
④，⑤の共通範囲を求めて



$-\sqrt{2}\leqq k<0 \quad \cdots\cdots$(答)

Ⅲ　解答

(1)　△ABC で余弦定理より



$$\cos\angle\mathrm{CAB}=\frac{5^2+8^2-7^2}{2\cdot 5\cdot 8}$$

$$=\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　△ABE と △FCE において

∠BAE＝∠CFE　（∵　AB∥FC）

∠AEB＝∠FEC

よって，２角相等より

△ABE∽△FCE

∴　AE：FE＝BE：CE＝3：2

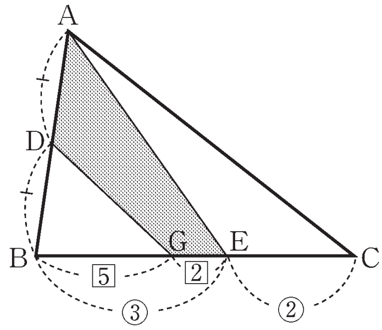
△ABE と直線 DF について，メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BG}}{\mathrm{GE}}\cdot\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FA}}=1$$

$$\therefore \quad \frac{1}{1}\cdot\frac{BG}{GE}\cdot\frac{2}{5}=1$$

よって，$\dfrac{BG}{GE}=\dfrac{5}{2}$ から　　$\dfrac{EG}{GB}=\dfrac{2}{5}$　……(答)

(3)　(1)の結果より



$$\sin\angle CAB=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\triangle ABC$ の面積 S_1

$$=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\sin\angle CAB$$

$$=\frac{1}{2}\cdot5\cdot8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=10\sqrt{3}$$

$\triangle ABE$ の面積 $S_2=S_1\times\dfrac{3}{3+2}=\dfrac{3}{5}S_1$

$\triangle BDG$ の面積 $S_3=S_2\times\dfrac{BD}{BA}\times\dfrac{BG}{BE}$

$$=\frac{3}{5}S_1\times\frac{1}{1+1}\times\frac{5}{5+2}$$

$$=\frac{3}{14}S_1$$

よって，四角形 ADGE の面積 S は

$$S=S_2-S_3=\frac{3}{5}S_1-\frac{3}{14}S_1=\frac{27}{70}S_1$$

$$=\frac{27}{70}\cdot10\sqrt{3}=\frac{27\sqrt{3}}{7}$$　……(答)