

## 数 学

① 解答 (1) ア.  $\frac{\sqrt{7}-1}{2}$  イ.  $-4$  ウ.  $4$

(2) エ.  $2t^2+t-1$  オ.  $-6 \leq t \leq 3$  カ.  $65$

(3) キ.  $14$  ク.  $\frac{65}{8}$  ケ.  $4$

(4) コ.  $\frac{1}{16}$  サ.  $\frac{65}{81}$  シ.  $\frac{91}{216}$

(5)(i) ス.  $3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + 4$  (ii) セ.  $-4$  ソ.  $\frac{16}{3}$  タ.  $\frac{7}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + 4n - \frac{16}{3}$

(6) チ.  $1$  ツ.  $-1$  テ.  $-\frac{5}{27}$

② 解答 (1)  $f(x)=x^3$  より  $f'(x)=3x^2$   
よって、曲線  $y=f(x)$  の点  $A(1, 1)$  における接線  
 $l$  の方程式は

$$y-1=3(x-1)$$

$$y=3x-2 \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

$y=f(x)$  と  $l$  の交点の  $x$  座標は

$$x^3=3x-2$$

$$x^3-3x+2=0$$

$$(x-1)^2(x+2)=0$$

$$\therefore x=1, -2$$

$$f(-2)=-8$$

よって、 $B$  の座標は  $(-2, -8)$   $\cdots \cdots (\text{答})$

(2)  $-2 \leq x \leq 1$  において

$$x^3 - (3x - 2) = (x - 1)^2(x + 2) \geq 0$$

であるから

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^1 \{x^3 - (3x - 2)\} dx = \int_{-2}^1 (x - 1)^2(x + 2) dx \\ &= \int_{-2}^1 (x - 1)^2 \{(x - 1) + 3\} dx = \int_{-2}^1 \{(x - 1)^3 + 3(x - 1)^2\} dx \\ &= \left[ \frac{1}{4}(x - 1)^4 + (x - 1)^3 \right]_{-2}^1 = \frac{27}{4} \quad \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$

(3)  $f(x) = g(x)$  とすると

$$x^3 = -\left(1 + \frac{1}{2}a\right)x^2 + \left(2 - \frac{1}{2}a\right)x + a$$

$$x^3 + \left(1 + \frac{1}{2}a\right)x^2 - \left(2 - \frac{1}{2}a\right)x - a = 0$$

$$(x + 2)\left(x + \frac{1}{2}a\right)(x - 1) = 0$$

$$\therefore x = -2, \quad -\frac{1}{2}a, \quad 1$$

ここで,  $-2 < a < 4$  より

$$-2 < -\frac{1}{2}a < 1$$

よって, 2つの曲線  $y = f(x)$  と  $y = g(x)$  の交点の  $x$  座標は

$$-2, \quad -\frac{1}{2}a, \quad 1 \quad \dots\dots (\text{答})$$

(4)  $-2 < a < 4$  より  $-2 < -\frac{1}{2}a < 1$

また, (3)より

$$f(x) - g(x) = (x + 2)\left(x + \frac{1}{2}a\right)(x - 1)$$

であるから

$$\bullet \quad -2 \leq x \leq -\frac{1}{2}a \quad \text{において} \quad f(x) - g(x) \geq 0$$

$$\bullet \quad -\frac{1}{2}a \leq x \leq 1 \quad \text{において} \quad f(x) - g(x) \leq 0$$

よって, 2つの曲線  $y = f(x)$  と  $y = g(x)$  で囲まれる2つの部分の面積

が等しいから

$$\int_{-2}^{-\frac{1}{2}a} \{f(x) - g(x)\} dx = - \int_{-\frac{1}{2}a}^1 \{f(x) - g(x)\} dx$$

$$\int_{-2}^{-\frac{1}{2}a} \{f(x) - g(x)\} dx + \int_{-\frac{1}{2}a}^1 \{f(x) - g(x)\} dx = 0$$

$$\int_{-2}^1 \{f(x) - g(x)\} dx = 0$$

$$\int_{-2}^1 \left\{ x^3 + \left(1 + \frac{1}{2}a\right)x^2 - \left(2 - \frac{1}{2}a\right)x - a \right\} dx = 0$$

$$\left[ \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2}a\right)x^3 - \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2}a\right)x^2 - ax \right]_{-2}^1 = 0$$

$$\frac{9}{4} - \frac{9}{4}a = 0 \quad \therefore \quad a = 1 \quad \cdots \cdots (\text{答})$$