

数 学 ①

◀ 数学 I, A ▶

1

解 答

(1)アイ. 41 ウエオ. 333

(2)カ. 8 キ. 8

(3)ク. 3 ケ. 6 コ. 2 サ. 2 シス. -6 セ. 6 ソタ. 25

チ. 2

(4) i) ツ. 2 テ. 6 ii) トナ. -1 ニ. 3

(5)ヌネ. 50 ノハ. 67 ヒフ. 74

解 説

《小問 5 問》

(1) $x=0.\dot{1}2\dot{3}$ ……① とおく。

① $\times 1000$ - ① より $999x=123$

$$x=\frac{41}{333} \rightarrow \text{ア} \sim \text{オ}$$

(2) $\frac{1}{7}=0.\dot{1}4285\dot{7}$ であるから、小数第 1 位以下は 6 個の数字の列 142857 を繰り返す。

$10=1\times 6+4$ より、小数第 10 位の数は 8 $\rightarrow$ カ

$100=16\times 6+4$ より、小数第 100 位の数も 8 $\rightarrow$ キ

(3) $2<\sqrt{6}<3$ より、 $\sqrt{6}$ の整数部分は 2 であるから $a=\sqrt{6}-2$

$$\begin{aligned} a+\frac{1}{a} &= \sqrt{6}-2+\frac{1}{\sqrt{6}-2} \\ &= \sqrt{6}-2+\frac{\sqrt{6}+2}{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{6} - 2 + \frac{\sqrt{6} + 2}{2}$$

$$= \frac{3\sqrt{6} - 2}{2} \rightarrow \text{ク} \sim \text{サ}$$

$$a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2$$

$$= \left(\frac{3\sqrt{6} - 2}{2}\right)^2 - 2$$

$$= \frac{58 - 12\sqrt{6}}{4} - 2$$

$$= \frac{-6\sqrt{6} + 25}{2} \rightarrow \text{シ} \sim \text{チ}$$

$$(4) \text{ i) } \begin{cases} 4x - 2 < 3x + 4 & \cdots \cdots \text{①} \\ 5 - 3x < 1 - x & \cdots \cdots \text{②} \end{cases}$$

$$\text{①より} \quad x < 6 \quad \cdots \cdots \text{③}$$

$$\text{②より} \quad -2x < -4 \quad x > 2 \quad \cdots \cdots \text{④}$$

$$\text{③, ④の共通範囲を求めて} \quad 2 < x < 6 \rightarrow \text{ツ, テ}$$

$$\text{ii) } |2x| + |x - 5| \geq 8 \quad \cdots \cdots \text{①}$$

(i) $x < 0$ のとき

$$\text{①より} \quad -2x - (x - 5) \geq 8 \quad -3x \geq 3 \quad x \leq -1$$

$$x < 0 \text{ との共通範囲を求めて} \quad x \leq -1$$

(ii) $0 \leq x < 5$ のとき

$$\text{①より} \quad 2x - (x - 5) \geq 8 \quad x \geq 3$$

$$0 \leq x < 5 \text{ との共通範囲を求めて} \quad 3 \leq x < 5$$

(iii) $5 \leq x$ のとき

$$\text{①より} \quad 2x + x - 5 \geq 8 \quad x \geq \frac{13}{3}$$

$$5 \leq x \text{ との共通範囲を求めて} \quad 5 \leq x$$

$$(i), (ii), (iii) \text{より} \quad x \leq -1, 3 \leq x \rightarrow \text{ト} \sim \text{ニ}$$

(5) 100 以下の自然数のうち, 2 の倍数の集合を A , 3 の倍数の集合を B , 5 の倍数の集合を C とする。

$$A = \{2 \cdot 1, 2 \cdot 2, \cdots, 2 \cdot 50\} \text{より} \quad n(A) = 50 \rightarrow \text{ヌネ}$$

$$B = \{3 \cdot 1, 3 \cdot 2, \cdots, 3 \cdot 33\} \text{より} \quad n(B) = 33$$

$C = \{5 \cdot 1, 5 \cdot 2, \dots, 5 \cdot 20\}$ より $n(C) = 20$

$A \cap B = \{6 \cdot 1, 6 \cdot 2, \dots, 6 \cdot 16\}$ より $n(A \cap B) = 16$

$B \cap C = \{15 \cdot 1, 15 \cdot 2, \dots, 15 \cdot 6\}$ より $n(B \cap C) = 6$

$C \cap A = \{10 \cdot 1, 10 \cdot 2, \dots, 10 \cdot 10\}$ より $n(C \cap A) = 10$

$A \cap B \cap C = \{30, 60, 90\}$ より $n(A \cap B \cap C) = 3$

よって

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 50 + 33 - 16$$

$$= 67 \rightarrow \text{ノハ}$$

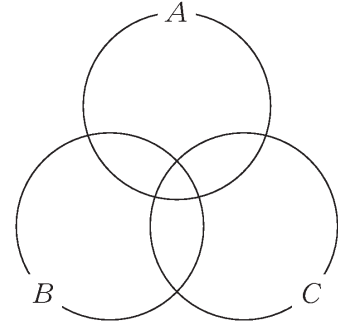
$$n(A \cup B \cup C)$$

$$= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B)$$

$$- n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$$

$$= 50 + 33 + 20 - 16 - 6 - 10 + 3$$

$$= 74 \rightarrow \text{ヒフ}$$



2

解答

(1) i) アイウ. 360 ii) エオカ. 240 iii) キク. 18

iv) ケコ. 24 v) サシ. 12

(2) i) スセソ. 924 タチ. 27 ツテ. 77 ト. 9 ナニ. 14

ii) ヌネ. 81 ノハ. 15 ヒフ. 36 ヘホ. 55

解説

《小問2問》

(1) i) $\frac{6!}{2!} = 360$ 通り $\rightarrow$ ア～ウ

ii) 2つの u が続く並び方は $5! = 120$ 通り

よって $360 - 120 = 240$ 通り $\rightarrow$ エ～カ

iii) 左から奇数番目に r, s, y が並び, 左から偶数番目に i, u, u が並べばよいので

$$3! \cdot \frac{3!}{2!} = 18 \text{ 通り} \rightarrow \text{キク}$$

iv) ryu または syu と並ぶとき, 小さい「ゆ」に変換される。

(i) 左から 1, 2, 3 番目に r, y, u がこの順で並ぶ

r	y	u			
			i	s	u
			s	i	u
			s	u	i
			u	s	i

とき

前の図のように 4 通り

- (ii) 左から 2, 3, 4 番目に r, y, u がこの順で並ぶとき

	r	y	u		
i				s	u
u				s	i

右図のように 2 通り

- (iii) 左から 3, 4, 5 番目に r, y, u がこの順で並ぶとき

		r	y	u	
s	u				i
s	i				u

右図のように 2 通り

- (iv) 左から 4, 5, 6 番目に r, y, u がこの順で並ぶとき

			r	y	u
i	s	u			
s	i	u			
s	u	i			
u	s	i			

右図のように 4 通り

syu についても同様であるから, (i)~(iv)より

$$(4+2+2+4) \cdot 2 = 24 \text{ 通り} \rightarrow \text{ケコ}$$

- ▼) iv) と同様に考えると, ryi と並ぶ場合は, 次図のように

$$2+1+1+2=6 \text{ 通り}$$

r	y	i					r	y	i						r	y	i					r	y	i	
			s	u	u	u				s	u				s	u					s	u	u		
			u	s	u																u	s	u		

syi についても同様であるから

$$6 \times 2 = 12 \text{ 通り} \rightarrow \text{サシ}$$

- (2) i) 総数は ${}_{12}C_6 = 924$ 通り $\rightarrow$ ス〜ソ

4 種類の絵柄から 3 種類を選ぶ方法は ${}_4C_3$ 通りあり, スペード, ハート, クラブを選ぶ場合を考えると, 2 枚ずつ合計 6 枚, または 1 枚, 2 枚, 3 枚で合計 6 枚となればよいので

$${}_3C_2 \cdot {}_3C_2 \cdot {}_3C_2 + {}_3C_1 \cdot {}_3C_2 \cdot {}_3C_3 \times 3! = 81 \text{ 通り}$$

他の絵柄の組についても同様であるから, A さんの手札の絵柄が 3 種類になる確率は

$$\frac{81 \cdot {}_4C_3}{924} = \frac{27}{77} \rightarrow \text{タ〜テ}$$

4 種類の絵柄から 2 種類を選ぶ方法は ${}_4C_2$ 通りあり, スペードとハートを選ぶ場合を考えると, どちらも 3 枚ずつ選べばよいので 1 通り

他の絵柄についても同様であるから, A さんの手札の絵柄が 2 種類に

$$\sin \angle ADB = \frac{BC}{BD} = \frac{1}{\sqrt{13}}$$

$$\text{よって } R = \sqrt{13} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$R = \sqrt{13} \rightarrow \text{カキ}$$

OB=OD=BD= $\sqrt{13}$ より, $\triangle BOD$ は正三角形であるから

$$\angle BOD = 60^\circ$$

$$\text{よって } \cos \angle BOD = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \rightarrow \text{ク, ケ}$$

$\triangle ACO$, $\triangle COD$ において, $\angle ACO = \alpha$ とおくと, 正弦定理により

$$\begin{cases} \frac{AC}{\sin \angle AOC} = \frac{OA}{\sin \alpha} & \dots\dots ① \\ \frac{DC}{\sin \angle COD} = \frac{OD}{\sin \alpha} & \dots\dots ② \end{cases}$$

$$① \text{より } \sin \angle AOC = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}} \sin \alpha$$

$$② \text{より } \sin \angle COD = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}} \sin \alpha$$

$$\text{よって } \frac{\sin \angle AOC}{\sin \angle COD} = \frac{1}{2} \rightarrow \text{コ, サ}$$

(2) 正四面体 ABCD と正四面体 APQR の相似比は

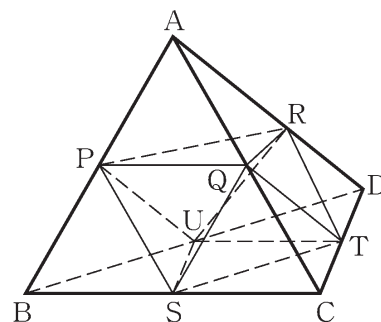
$$AB : AP = 2 : 1 \rightarrow \text{シ}$$

よって, 体積比は $2^3 : 1^3 = 8 : 1$ であるから

(正四面体 APQR の体積)

$$= (\text{正四面体 ABCD の体積}) \times \frac{1}{8}$$

$$= \frac{1}{8} \rightarrow \text{ス, セ}$$



正四面体 ABCD から 4 つの正四面体 APQR, BPSU, CSTQ, DRTU を取り除くと正八面体 PQRSTU が得られ, 4 つの正四面体の体積はすべて $\frac{1}{8}$ であるから

$$(\text{正八面体 PQRSTU の体積}) = 1 - \frac{1}{8} \times 4 = \frac{1}{2} \rightarrow \text{ソ, タ}$$

正八面体 PQRSTU の頂点 Q から 4 点 P, R, S, T を含む平面に垂線 QH を下ろすと, 点 H は正方形 PSTR の対角線の中点であるから

$$QH = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

よって

(正八面体 PQRSTU の体積)

$$= \left\{ a^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right) \cdot \frac{1}{3} \right\} \cdot 2$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}a^3 \rightarrow \text{チ, ツ}$$

次に, 正八面体 PQRSTU に内接する球の半径を r , 外接する球の半径を R とする。

辺 PR, 辺 ST の中点を M, N とすると, 右上図より面積に着目して

$$r \times \frac{\sqrt{3}}{2}a \times \frac{1}{2} = \frac{a}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}a \times \frac{1}{2}$$

$$\therefore r = \frac{\sqrt{6}}{6}a \rightarrow \text{テ, ト}$$

また, 右下図より

$$2R = \sqrt{2}a$$

$$\therefore R = \frac{\sqrt{2}}{2}a \rightarrow \text{ナ, ニ}$$

