# 数学①

## ◀数学Ⅰ，A▶

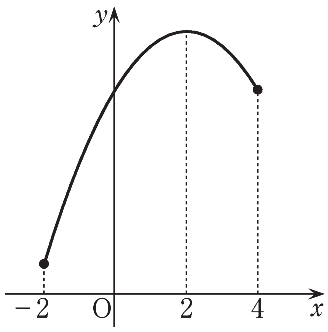
### 1 解答

(1)**アイ．** 14 **ウエ．** 18
(2)**オ．** 6 **カキ．** 14 **ク．** 0 **ケ．** 1
(3)**コサ．** 63 **シ．** 1 **スセ．** 15 **ソタ．** 71 **チ．** 9 **ツテ．** 11
**トナ．** 69 **ニ．** 7 **ヌ．** 1

### 解説

**《小問3問》**

**(1)** $y=-x^2+4x+c$
$=-(x^2-4x)+c$
$=-(x-2)^2+4+c$




このグラフは上に凸の放物線で，軸は直線 $x=2$ であるから，$-2\leqq x\leqq 4$ において，$x=-2$ のとき，$y$ は最小となるので，最小値が 2 となる $c$ の値は

$-(-2)^2+4(-2)+c=2$

$c=14$ →アイ

また，このとき

$y=-x^2+4x+14$

であり，$x=2$ のとき，$y$ は最大となるので，$y$ の最大値は

$4+c=4+14=18$ →ウエ

**(2)** $y=f(x)=-x^2+4|x-1|+c \quad (-2\leqq x\leqq 4)$

とおくと

(i) $x-1\geqq 0$，すなわち，$1\leqq x\leqq 4$ のとき

$f(x)=-x^2+4(x-1)+c$

$$= -x^2 + 4x - 4 + c$$
$$= -(x-2)^2 + c$$

このグラフは上に凸の放物線で，軸は直線 $x=2$ である。このとき

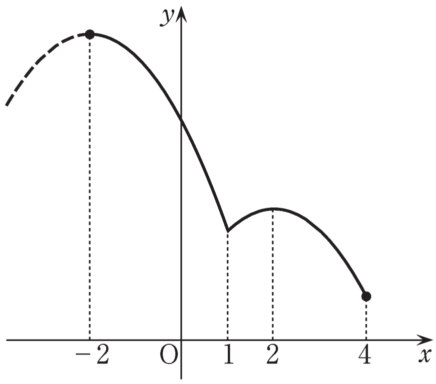
$$f(1) = -(1-2)^2 + c = -1 + c$$
$$f(2) = c$$
$$f(4) = -(4-2)^2 + c = -4 + c$$

(ii) $x-1<0$，すなわち，$-2 \leqq x < 1$ のとき

$$f(x) = -x^2 + 4\{-(x-1)\} + c$$
$$= -x^2 - 4x + 4 + c$$
$$= -(x+2)^2 + 8 + c$$

このグラフは上に凸の放物線で，軸は直線 $x=-2$ である。このとき

$$f(-2) = 8 + c$$

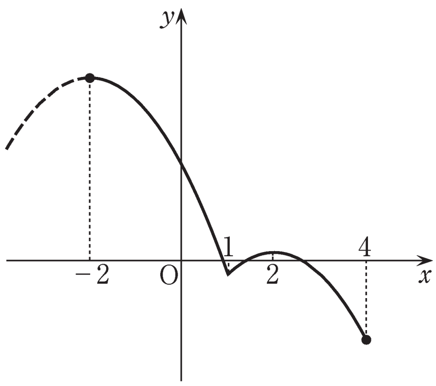



以上 (i)，(ii) より，$f(4) < f(1) < f(2) < f(-2)$ であり，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。これより，$x=4$ のとき，$f(x)$ は最小となるので，最小値が 2 となる $c$ の値は

$$f(4) = 2 \qquad -4 + c = 2$$
$$c = 6 \quad \rightarrow オ$$

また，$x=-2$ のとき，$f(x)$ は最大となるので，$y$ の最大値は

$$f(-2) = 8 + c = 8 + 6$$
$$= 14 \quad \rightarrow カキ$$




次に，$y=f(x)$ のグラフが $x$ 軸と 3 つの異なる共有点をもつ条件は

$$f(1) < 0 \quad かつ \quad f(2) > 0$$

であるから

$$-1 + c < 0,\ c > 0$$

これを解くと　　$0 < c < 1$　→ク，ケ

**(3)**　あるホテルの客室は全部で 20 室あり，1 室 1 人の室数を $x$，1 室 2 人の室数を $y$ とすると，$x+y \leqq 20$ であり，1 日の売上高は

$$x \times 3 + y \times 4 = (3x + 4y)\ 万円$$

となる。このとき，ある週の月曜日の宿泊客数が 31 人のときの組 $(x,\ y)$

は全部で

$$(x,\ y)=(1,\ 15),\ (3,\ 14),\ (5,\ 13),\ (7,\ 12),\ (9,\ 11)$$

の5通りである。ここで，それぞれの売上高を求めると

(i)　$(x,\ y)=(1,\ 15)$ のとき　　$3\cdot1+4\cdot15=63$ 万円

(ii)　$(x,\ y)=(3,\ 14)$ のとき　　$3\cdot3+4\cdot14=65$ 万円

(iii)　$(x,\ y)=(5,\ 13)$ のとき　　$3\cdot5+4\cdot13=67$ 万円

(iv)　$(x,\ y)=(7,\ 12)$ のとき　　$3\cdot7+4\cdot12=69$ 万円

(v)　$(x,\ y)=(9,\ 11)$ のとき　　$3\cdot9+4\cdot11=71$ 万円

であるので，(i)のとき，売上高は最小となり，(v)のとき，売上高は最大となる。よって，売上高のとる最小値は63万円であり，このとき1人で宿泊した客室数は1室，2人で宿泊した客室数は15室である。→コ～セ

また，売上高のとる最大値は71万円であり，このとき1人で宿泊した客室数は9室，2人で宿泊した客室数は11室である。→ソ～テ

次に，同じ週の火曜日の宿泊客数は33人であった。このとき，組 $(x,\ y)$ は全部で

$$(x,\ y)=(1,\ 16),\ (3,\ 15),\ (5,\ 14),\ (7,\ 13)$$

の4通りである。ここで，それぞれの売上高を求めると

$(x,\ y)=(1,\ 16)$ のとき　　$3\cdot1+4\cdot16=67$ 万円

$(x,\ y)=(3,\ 15)$ のとき　　$3\cdot3+4\cdot15=69$ 万円

$(x,\ y)=(5,\ 14)$ のとき　　$3\cdot5+4\cdot14=71$ 万円

$(x,\ y)=(7,\ 13)$ のとき　　$3\cdot7+4\cdot13=73$ 万円

であるから，火曜日の売上高の最小値は67万円となる。ここで，火曜日の売上高が前日の月曜日よりも減少したとするとき，月曜日の売上高のとりうる値が最小となるのは，(iv)の $(x,\ y)=(7,\ 12)$ のときであるので，求める最小値は69万円であり，1人で宿泊した客室数は7室となり，利用されなかった客室数は，$20-(7+12)=1$ 室である。→ト～ヌ

## 2 解答

**(1) i）ア．** 5　**イウ．** 11　**エ．** 1　**オ．** 3
**ii）カ．** 3　**キク．** 55　**iii）ケ．** 4　**コサ．** 33
**iv）シ．** 8　**スセソ．** 165　**v）タ．** 6　**チツ．** 11
**(2) i）テト．** 21　**ナニ．** 12　**ii）ヌ．** 1　**ネ．** 2　**iii）ノ．** 5　**ハヒ．** 36
**iv）フ．** 1　**ヘ．** 9

## 解説

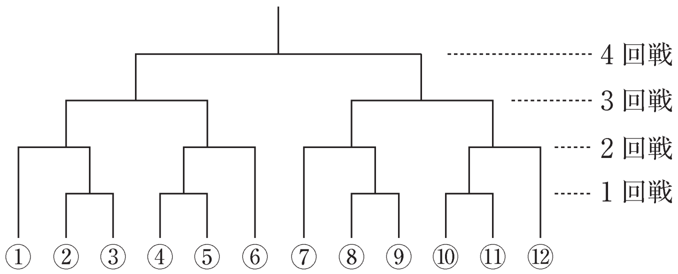
**《トーナメント戦の場合の数と確率》**

**(1)　i）**　参加者が 11 名の場合，A が 1 回戦を免除されるのは，11 本のくじから，1，6，7，8，9 の数のくじのどれかを引けばよいので，求める確率は

$$\frac{5}{11}\quad \to ア〜ウ$$

参加者が 12 名の場合，次の図より，A が 1 回戦を免除されるのは，12 本のくじから，1，6，7，12 の数のくじのどれかを引けばよいので，求める確率は

$$\frac{4}{12}=\frac{1}{3}\quad \to エ，オ$$




**ii）**　参加者が 11 名の場合，B，C のくじの引き方は，全部で

$${}_{11}P_2=11\cdot 10 \text{ 通り}$$

であり，B と C が 1 回戦で対戦するのは，B，C が引く番号の組が

$$(B,\ C)=(2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 5),\ (5,\ 4),\ (10,\ 11),\ (11,\ 10)$$

の 6 通りあるので，求める確率は

$$\frac{6}{11\cdot 10}=\frac{3}{55}\quad \to カ〜ク$$

**iii）**　参加者が 11 名の場合，A，B，C のくじの引き方は，全部で

$${}_{11}P_3=11\cdot 10\cdot 9 \text{ 通り}$$

であり，A，B，C の全員が，1 回戦を免除されないのは，A，B，C の引く番号が，2，3，4，5，10，11 のいずれかであればよいので，その引き方は ${}_6P_3$ 通りある。よって，求める確率は

$$\frac{{}_6P_3}{11\cdot 10\cdot 9}=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{11\cdot 10\cdot 9}=\frac{4}{33}\quad \to ケ〜サ$$

**iv）**　A，B，C の全員が，1 回戦を免除されず，かつ，互いが 1 回戦で

対戦することのないのは，A，B，Cがそれぞれ，枠（②，③），（④，⑤），（⑩，⑪）のいずれかに入り，その各々について2通りずつの入り方があるので，このくじの引き方は，$3!\times 2^3$ 通りある。よって，求める確率は

$$\frac{3!\times 2^3}{11\cdot 10\cdot 9}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\times 8}{11\cdot 10\cdot 9}=\frac{8}{165}\quad \to シ〜ソ$$

**v）** A，Bのくじの引き方は，全部で ${}_{11}P_2=11\cdot 10$ 通りあり，AとBがともに勝ち進んだとしても，決勝まで互いに対戦することがないのは，AとBが

（①，②，③，④，⑤，⑥），（⑦，⑧，⑨，⑩，⑪）

の2枠のいずれかに入ればよいので，そのくじの引き方は，$6\cdot 5\times 2$ 通りある。よって，求める確率は

$$\frac{6\cdot 5\times 2}{11\cdot 10}=\frac{6}{11}\quad \to タ〜ツ$$

**(2)** 条件より，さいころを2個振ったときの参加可能者数は右表のようになる。

| 大＼小 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 20 | 21 | 31 | 41 | 51 | 61 |
| 2 | 21 | 30 | 32 | 42 | 52 | 62 |
| 3 | 31 | 32 | 40 | 43 | 53 | 63 |
| 4 | 41 | 42 | 43 | 50 | 54 | 64 |
| 5 | 51 | 52 | 53 | 54 | 60 | 65 |
| 6 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 70 |

**i）** 参加可能者数は全部で

20，21，30，31，32，40，41，
42，43，50，51，52，53，54，
60，61，62，63，64，65，70

の21通りある。→テト

そのうち参加可能者数が50以上となるのは，12通りある。→ナニ

**ii）** 試合の総数が偶数になるのは，参加可能者数が奇数となればよいので，表より，全部で18通りある。よって，求める確率は

$$\frac{18}{36}=\frac{1}{2}\quad \to ヌ，ネ$$

**iii）** $n$ を自然数とする。参加者が $2^n$ 名の場合はシードがないので，このとき，優勝するために勝利しなければならない試合数は $n$ となる。これより，試合数が $2^n+1$ 以上 $2^{n+1}$ 未満のとき，シードが必要となるので，優勝するためには最小で $n$ 試合勝利しなければならない。よって，優勝するために勝利しなければならない試合の最小数が6になる参加可能者数

$N$の範囲は

$$2^6 \leqq N < 2^7 \qquad 64 \leqq N < 128$$

であるから，先の表より，$N$は，64，64，65，65，70の5通りある。

以上より，求める確率は

$$\frac{5}{36} \quad \to ノ\sim ヒ$$

**iv）** iii)の考察より，シードを設けずにトーナメント表を作成できる参加可能者数は，$32\,(=2^5)$，$64\,(=2^6)$ であるから，先の表より，全部で4通りある。

よって，求める確率は

$$\frac{4}{36} = \frac{1}{9} \quad \to フ，ヘ$$

## 3 解答

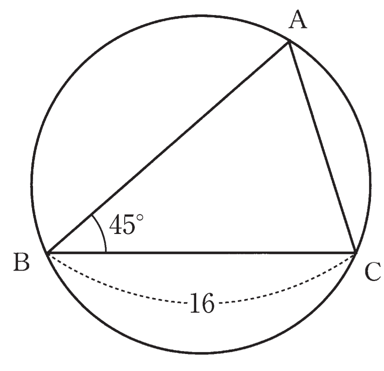
**(1)ア．** 2 **イ．** 2 **ウ．** 4 **エ．** 5 **オカ．** 10 **キ．** 2 **クケ．** 14 **コ．** 2 **サシス．** 112 **セ．** 6 **ソ．** 2 **タ．** 4

**(2)チ．** 3 **ツ．** 5 **テ．** 5 **ト．** 7 **ナ．** 7 **ニ．** 3 **ヌ．** 3

### 解説

**《正弦・余弦定理，三角形の面積，内接円の半径とその性質》**

**(1)** $B = 45^\circ$ より




$$\cos B = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \to ア，イ$$

また，△ABCの外接円の半径は10であるから，正弦定理より

$$\frac{BC}{\sin A} = 2\cdot 10$$

$$\frac{16}{\sin A} = 2\cdot 10$$

$$\sin A = \frac{4}{5} \quad \to ウ，エ$$

さらに，正弦定理を用いると

$$\frac{AC}{\sin 45^\circ} = 2\cdot 10$$

$$AC=2\cdot 10\sin 45^\circ=2\cdot 10\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=10\sqrt{2}\quad \to \text{オ〜キ}$$

次に，AB$=x$とおくとき，△ABCについて，余弦定理を用いると

$$AC^2=AB^2+BC^2-2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos 45^\circ$$

$$(10\sqrt{2})^2=x^2+16^2-2\cdot x\cdot 16\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$200=x^2+256-16\sqrt{2}x$$

$$x^2-16\sqrt{2}x+56=0$$

$$(x-2\sqrt{2})(x-14\sqrt{2})=0$$

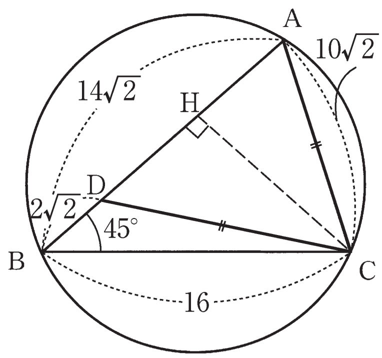
$$x=2\sqrt{2},\ 14\sqrt{2}$$

よって

$$AB=2\sqrt{2},\ 14\sqrt{2}\quad\cdots\cdots①$$

ここで，右図のように，鋭角三角形ABCについて，点Cから線分ABに下ろした垂線の足をHとし，線分AB上の点DをAC＝CDを満たすようにとると，①より，条件を満たすのは

$$AB=14\sqrt{2}\quad \to \text{ク〜コ}$$




である。このとき，△ABCの面積$S$は

$$S=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot\sin 45^\circ=\frac{1}{2}\cdot 14\sqrt{2}\cdot 16\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=112\quad \to \text{サ〜ス}$$

次に，△ABCの内接円の半径を$r$とすると

$$S=\frac{r}{2}(AB+BC+CA)$$

$$112=\frac{r}{2}(14\sqrt{2}+16+10\sqrt{2})$$

$$112=r(8+12\sqrt{2})$$

$$r=\frac{28}{3\sqrt{2}+2}$$

$$=\frac{28(3\sqrt{2}-2)}{(3\sqrt{2})^2-2^2}=2(3\sqrt{2}-2)$$

$$=6\sqrt{2}-4\quad \to \text{セ〜タ}$$

**(2)**　△ABCの内接円の中心をＩとすると，内接円の半径が$\sqrt{3}$より，IP$=\sqrt{3}$であり，直線IBは∠Bの二等分線であるから，$B=60^\circ$より，

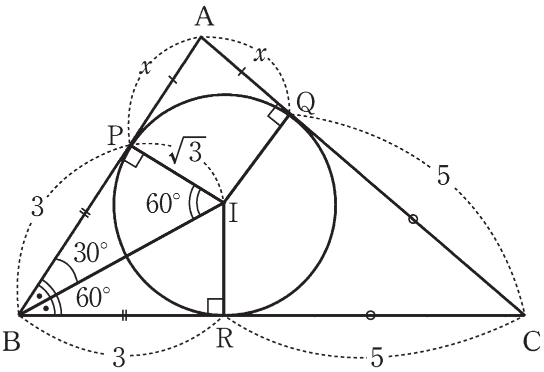
$\angle PBI = 30°$ となる。

また，$\angle IPB = 90°$ より

$$BP : IP = \sqrt{3} : 1$$

$$BP : \sqrt{3} = \sqrt{3} : 1$$

$$BP = 3 \quad \to チ$$




また，内接円と辺 BC との接点を R とすると

$$BR = BP = 3$$

であり，$BC = 8$ より

$$CR = BC - BR$$
$$= 8 - 3 = 5$$

よって

$$CQ = CR = 5 \quad \to ツ$$

また，$AP = AQ = x$ とおくと

$$AB = AP + PB = x + 3$$

$$AC = AQ + QC = x + 5$$

であるから，$\triangle ABC$ について，余弦定理を用いると

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos 60°$$

$$(x+5)^2 = (x+3)^2 + 8^2 - 2(x+3) \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}$$

$$x^2 + 10x + 25 = x^2 + 6x + 9 + 64 - (8x + 24)$$

$$12x = 24$$

$$x = 2$$

よって

$$AB = x + 3 = 2 + 3 = 5 \quad \to テ$$

$$AC = x + 5 = 2 + 5 = 7 \quad \to ト$$

また，$\triangle ABC$ の外接円の半径を $R$ とすると，正弦定理より

$$\frac{AC}{\sin 60°} = 2R$$

$$R = \frac{AC}{2\sin 60°} = \frac{7}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{7\sqrt{3}}{3}\quad \rightarrow ナ〜ヌ$$