数学

1 解答

(1) $(x-2)(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)^2$

$=(x-2)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)$

$=(x^3-8)\{(x^2+4)-2x\}\{(x^2+4)+2x\}$

$=(x^3-8)\{(x^2+4)^2-4x^2\}$

$=(x^3-8)(x^4+4x^2+16)$

$=x^7+4x^5-8x^4+16x^3-32x^2-128$ ……(答)

(2) $ab+5a-2b-22=0$ とすると

$(a-2)(b+5)=12$

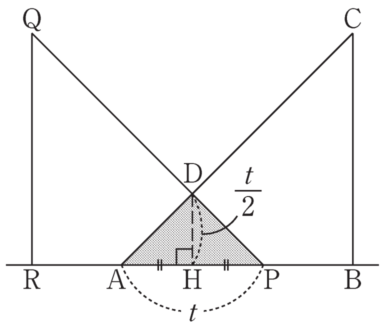
$a-2\geqq -1$, $b+5\geqq 6$ であるから

$(a-2,\ b+5)=(1,\ 12),\ (2,\ 6)$

$(a,\ b)=(3,\ 7),\ (4,\ 1)$ ……(答)

2 解答

(1) $0\leqq t\leqq 2$ のとき，S は右図の網かけ部分の直角二等辺三角形の面積である。ACとPQの交点をDとし，Dから l に下ろした垂線の足をHとすると，HはAPの中点であるから



$$S=\triangle\mathrm{ADP}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AP}\cdot\mathrm{DH}=\frac{1}{2}\cdot t\cdot\frac{t}{2}$$

$$=\frac{t^2}{4}$$ ……(答)

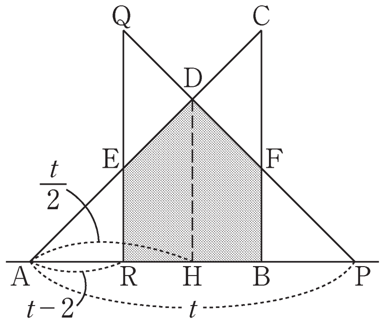
(2) $2<t\leqq 4$ のとき，S は右図の網かけ部分の五角形の面積である。

$S=\triangle\mathrm{ADP}-\triangle\mathrm{AER}-\triangle\mathrm{PFB}$

$$=\frac{1}{2}\cdot t\cdot\frac{t}{2}-2\cdot\frac{1}{2}(t-2)^2$$

$$=\frac{t^2}{4}-(t-2)^2=-\frac{3}{4}t^2+4t-4$$

……(答)



(3)　S は $0\leqq t\leqq 2$ のとき t に関して単調増加であるから，S の最大値を求めるためには $2\leqq t\leqq 4$ で考えれば十分である。このとき

$$S=-\frac{3}{4}\left(t-\frac{8}{3}\right)^2+\frac{4}{3}$$

であるから，$t=\frac{8}{3}$ で S は最大値 $\frac{4}{3}$ をとる。　……(答)

3　解答

(1)　各課題に取り組む 4 人の組合せを順番に考えて

$${}_{12}C_4\cdot{}_8C_4\cdot{}_4C_4=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{4\cdot 3\cdot 2}\cdot\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2}$$

$$=495\cdot 70=34650 \text{ 通り}$$　……(答)

(2)　(1)において課題の区別をなくすと，3! 通りずつ同じ分け方が現れるから

$$\frac{34650}{3!}=5775 \text{ 通り}$$　……(答)

(3)　3 つのグループに入る男子の人数の組合せは（1，2，3)，(2，2，2）のいずれかである。

（1，2，3）のとき，6 人の男子の分け方は

$${}_6C_1\cdot{}_5C_2\cdot{}_3C_3=6\cdot 10=60 \text{ 通り}$$

男子を 1 人，2 人，3 人入れた 3 つのグループに，それぞれ女子を 3 人，2 人，1 人入れるから，女子の入れ方は

$${}_6C_3\cdot{}_3C_2\cdot{}_1C_1=20\cdot 3=60 \text{ 通り}$$

よって

$$60\cdot 60=3600 \text{ 通り}$$

（2，2，2）のとき，6 人の男子の分け方は

$$\frac{{}_6C_2 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2}{3!} = \frac{15 \cdot 6}{6} = 15 \text{ 通り}$$

男子を2人ずつ入れた3つのグループに，それぞれ女子を2人ずつ入れるから，女子の入れ方は

$${}_6C_2 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2 = 15 \cdot 6 = 90 \text{ 通り}$$

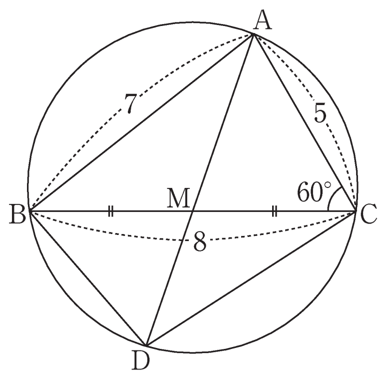
よって

$$15 \cdot 90 = 1350 \text{ 通り}$$

以上より，求める分け方は

$$3600 + 1350 = 4950 \text{ 通り} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

4 解答



(1)　△ABC で余弦定理を用いて

$$\cos C = \frac{5^2 + 8^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2}$$

$C = 60°$ である。また，$\mathrm{CM} = \frac{1}{2}\mathrm{BC} = 4$ であるから，△ACM で余弦定理を用いて

$$\mathrm{AM}^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cos 60°$$

$$= 25 + 16 - 40 \cdot \frac{1}{2} = 21$$

よって　　$\mathrm{AM} = \sqrt{21}$　……(答)

(2)　方べきの定理を用いて

$$\mathrm{AM} \cdot \mathrm{DM} = \mathrm{BM} \cdot \mathrm{CM}$$

$$\sqrt{21} \cdot \mathrm{DM} = 4 \cdot 4 \qquad \therefore \quad \mathrm{DM} = \frac{16}{\sqrt{21}} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(3)　面積比を利用する。

$$\triangle \mathrm{ABC} : \triangle \mathrm{DBC} = \mathrm{AM} : \mathrm{DM} = \sqrt{21} : \frac{16}{\sqrt{21}} = 21 : 16$$

であり

$$\triangle \mathrm{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \sin 60° = 10\sqrt{3}$$

であるから，四角形 ABDC の面積は

$$\triangle ABC + \triangle DBC = \triangle ABC + \frac{16}{21}\triangle ABC = \frac{37}{21}\triangle ABC$$

$$= \frac{37}{21} \cdot 10\sqrt{3} = \frac{370\sqrt{3}}{21} \quad \cdots\cdots(答)$$