

数 学

I

解答

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & 2x^2 + xy - y^2 - 4x + 5y - 6 \\
 &= 2x^2 + (y-4)x - (y^2 - 5y + 6) \\
 &= 2x^2 + (y-4)x - (y-2)(y-3) \\
 &= (x+y-3)(2x-y+2) \quad \dots\dots(\text{答})
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl}
 1 & \times & y-3 \longrightarrow 2y-6 \\
 2 & \times & -(y-2) \longrightarrow -y+2 \\
 \hline
 & & y-4
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & 2x^2 + xy - y^2 - 4x + 5y - 6 > 0 \\
 & (x+y-3)(2x-y+2) > 0 \\
 & \begin{cases} x+y-3 > 0 \\ 2x-y+2 > 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} x+y-3 < 0 \\ 2x-y+2 < 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

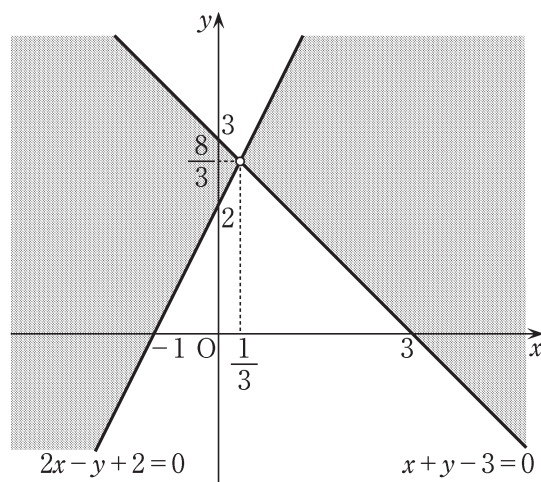
また

$$\begin{cases} x+y-3=0 \\ 2x-y+2=0 \end{cases}$$

を解くと

$$x = \frac{1}{3}, \quad y = \frac{8}{3}$$

よって、領域 D を図示すると、下の図の網かけ部分。ただし、境界は含まない。



$$(3) \quad x^2 + y^2 - 2kx - y + k^2 < 0$$

$$(x - k)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

よって、中心が $\left(k, \frac{1}{2}\right)$ 、半径 $\frac{1}{2}$ の円を C とすると、領域 E は円 C の内部（周を含まない）を表す。

$P\left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right)$, $Q(-1, 0)$, $R(3, 0)$ とする。

円 C は中心が直線 $y = \frac{1}{2}$ 上にあり、 x 軸に接する円であるから、領域 D と領域 E の共通部分が空集合となる条件は、円 C が $\triangle PQR$ の内部（周を含む）にあるときである。

(i) 円 C が直線 PQ すなわち直線 $2x - y + 2 = 0$ と接するとき

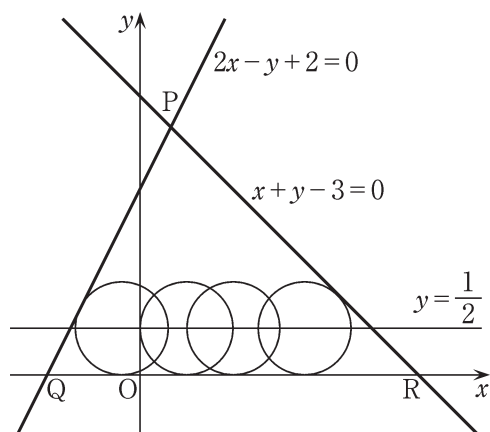
円 C の中心 $\left(k, \frac{1}{2}\right)$ と直線 PQ の距離が半径に等しいから

$$\frac{\left|2k - \frac{1}{2} + 2\right|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$$

$$\left|2k + \frac{3}{2}\right| = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$2k + \frac{3}{2} = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{より} \quad k = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{4}$$



△PQR の内部になるのは $k = \frac{-3 + \sqrt{5}}{4}$

(ii) 円 C が直線 PR すなわち直線 $x + y - 3 = 0$ と接するとき

(i)と同様にして

$$\frac{\left|k + \frac{1}{2} - 3\right|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\left|k - \frac{5}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$k - \frac{5}{2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

より $k = \frac{5 \pm \sqrt{2}}{2}$

△PQR の内部になるのは $k = \frac{5 - \sqrt{2}}{2}$

以上より、求める k の値の範囲は

$$\frac{-3 + \sqrt{5}}{4} \leq k \leq \frac{5 - \sqrt{2}}{2} \quad \dots\dots (\text{答})$$

II

解答

(1) 赤玉どうしか白玉どうしが交換されるときであるから、求める確率は

$$\frac{4}{6} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{5}{12} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(2) 交換される玉の色について、次の3通りの場合に分ける。

(i) 同じ色の球が交換される。

(ii) Aの赤玉とBの白玉が交換される。

(iii) Aの白玉とBの赤玉が交換される。

(i)の確率は、(1)より $\frac{5}{12}$

(ii)の確率は $\frac{4}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$

(iii)の確率は $\frac{2}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

(i), (ii), (iii)の各状態から、Bの外側に白玉が置かれる確率は、それぞれ、

$\frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{4}{4}$ であるから、求める確率は

$$\frac{5}{12} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{4} + \frac{1}{12} \times \frac{4}{4} = \frac{5}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{31}{48} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(3) (2)の(i), (ii), (iii)の各状態から、Aの外側に赤玉が置かれる確率は、それぞれ、 $\frac{4}{6}, \frac{3}{6}, \frac{5}{6}$ であるから、Aの外側に赤玉、Bの外側に白玉が置かれる確率は、(2)を用いて

$$\frac{5}{16} \times \frac{4}{6} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{12} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{24} + \frac{1}{8} + \frac{5}{72} = \frac{29}{72}$$

よって、求める確率は

$$\frac{\frac{5}{24}}{\frac{29}{72}} = \frac{15}{29} \quad \dots\dots (\text{答})$$

III 解答 (1) $OC : CA = 1 : 2$ より

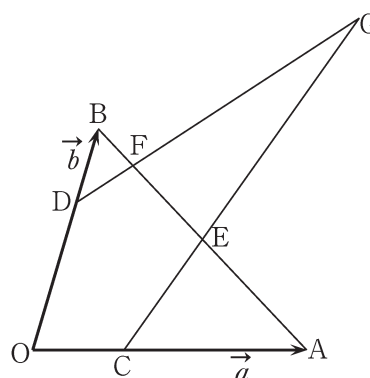
$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}\vec{a}$$

点Eは辺ABの中点であるから

$$\overrightarrow{OE} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$

よって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CE} &= \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OC} \\ &= \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} - \frac{1}{3}\vec{a} \\ &= \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \quad \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$



(2) 点Gは直線CE上にあるから、 k を実数として

$$\overrightarrow{CG} = k\overrightarrow{CE}$$

とおける。

よって

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CG}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3}\vec{a} + k\left(\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) \\
&= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}k\right)\vec{a} + \frac{1}{2}k\vec{b} \quad \dots\dots ①
\end{aligned}$$

また、点 G は直線 DF 上にあるから、 l を実数として

$$\overrightarrow{DG} = l\overrightarrow{DF}$$

とおける。

$$\text{OD} : \text{DB} = 2 : 1 \text{ より } \quad \overrightarrow{OD} = \frac{2}{3}\vec{b}$$

$$\text{AF} : \text{FB} = 5 : 1 \text{ より } \quad \overrightarrow{OF} = \frac{\vec{a} + 5\vec{b}}{6}$$

よって

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{DF} &= \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OD} \\
&= \frac{\vec{a} + 5\vec{b}}{6} - \frac{2}{3}\vec{b} \\
&= \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OG} &= \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DG} \\
&= \frac{2}{3}\vec{b} + l\left(\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}\right) \\
&= \frac{1}{6}l\vec{a} + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}l\right)\vec{b} \quad \dots\dots ②
\end{aligned}$$

$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ で $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないから、①, ②より

$$\begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{1}{6}k = \frac{1}{6}l \\ \frac{1}{2}k = \frac{2}{3} + \frac{1}{6}l \end{cases}$$

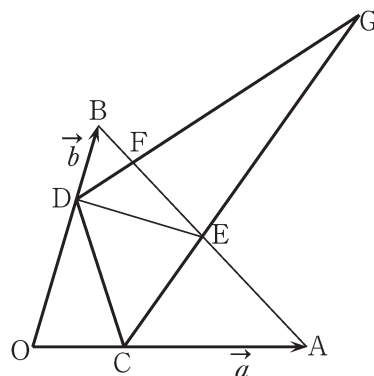
これを解いて $k = 3$, $l = 5$

よって、①より

$$\overrightarrow{OG} = \frac{5}{6}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(3) $\triangle OAB$ の面積を S とする。

$\text{OC} : \text{CA} = 1 : 2$, $\text{AE} : \text{EB} = 1 : 1$,



OD : DB = 2 : 1 より

$$\triangle ECA = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} S = \frac{1}{3} S$$

$$\triangle DOC = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} S = \frac{2}{9} S$$

$$\triangle BDE = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} S = \frac{1}{6} S$$

よって

$$\triangle DCE = S - \left(\frac{1}{3} S + \frac{2}{9} S + \frac{1}{6} S \right) = \frac{5}{18} S$$

CE : CG = 1 : 3 であるから

$$\triangle CDG = 3 \triangle DCE = \frac{5}{6} S$$

ここで

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2^2 \times (\sqrt{3})^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{11}}{2} \end{aligned}$$

であるから、三角形 CDG の面積は

$$\frac{5}{6} \times \frac{\sqrt{11}}{2} = \frac{5\sqrt{11}}{12} \quad \dots\dots (\text{答})$$

別解 $\triangle CDG = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{GC}|^2 |\overrightarrow{GD}|^2 - (\overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GD})^2}$

である。

ここで

$$\overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{CG} = -3 \left(\frac{1}{6} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} \right)$$

$$\overrightarrow{GD} = -\overrightarrow{DG} = -5 \left(\frac{1}{6} \vec{a} + \frac{1}{6} \vec{b} \right)$$

であるから

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{GC}|^2 &= 9 \left| \frac{1}{6} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} \right|^2 = \frac{1}{4} |\vec{a} + 3\vec{b}|^2 \\ &= \frac{1}{4} (|\vec{a}|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2) \end{aligned}$$

$$= \frac{4+6+27}{4} = \frac{37}{4}$$

$$|\overrightarrow{\text{GD}}|^2 = 25 \left| \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} \right|^2 = \frac{25}{36} |\vec{a} + \vec{b}|^2$$

$$= \frac{25}{36} (|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2)$$

$$= \frac{25(4+2+3)}{36} = \frac{25}{4}$$

$$\overrightarrow{\text{GC}} \cdot \overrightarrow{\text{GD}} = 15 \left(\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \right) \cdot \left(\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} \right)$$

$$= \frac{5}{12} (\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$$

$$= \frac{5}{12} (|\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 3|\vec{b}|^2)$$

$$= \frac{5(4+4+9)}{12} = \frac{85}{12}$$

よって、求める面積は

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{37}{4} \times \frac{25}{4} - \left(\frac{85}{12} \right)^2} = \frac{5}{8} \sqrt{37 - \left(\frac{17}{3} \right)^2} = \frac{5\sqrt{11}}{12}$$