

# 数 学

I

解答

(1) 放物線  $y = \frac{1}{2}x^2$  は  $y$  軸対称である。

△OPQ が正三角形であるとき

$$OP = OQ$$

また

$$P\left(p, \frac{p^2}{2}\right), Q\left(q, \frac{q^2}{2}\right)$$

△OPQ は正三角形だから,  $OP = OQ$

より

$$p^2 + \frac{p^4}{4} = q^2 + \frac{q^4}{4}$$

$$\frac{1}{4}(p^4 - q^4) + (p^2 - q^2) = 0$$

$$(p^2 - q^2)\left(\frac{p^2 + q^2}{4} + 1\right) = 0$$

$$\frac{p^2 + q^2}{4} + 1 > 0 \text{ より } p^2 - q^2 = 0$$

$$p \neq q \text{ より } p = -q$$

$$p > 0 \text{ より } q = -p < 0$$

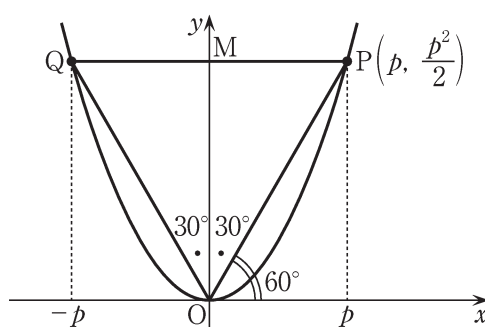
ゆえに, 2点 P, Q も  $y$  軸に関して対称であるから線分 PQ と  $y$  軸の交点を M とおくと

$$\triangle OPM \equiv \triangle OQM$$

$$\text{よって } \angle POM = \angle QOM = 30^\circ$$

したがって, OP と  $x$  軸のなす角は  $60^\circ$  である。

また,  $P\left(p, \frac{p^2}{2}\right)$  であるから OP の傾きについて



$$\frac{\frac{p^2}{2}}{p} = \tan 60^\circ$$

よって  $p = 2\sqrt{3}$  ……(答)

(2) 点Qの $x$ 座標は $-p$ であるから、正三角形OPQの1辺の長さは

$$PQ = 2p = 4\sqrt{3} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(3)  $\triangle OPQ$ の外接円の半径を $R$ とおくと、 $\triangle OPQ$ に正弦定理を用いて

$$2R = \frac{PQ}{\sin 60^\circ}$$

よって  $R = 4$  ……(答)

**別解** 正三角形の外心と重心は一致するから、 $\triangle OPQ$ の外心は、辺PQの中線OMを2:1に内分する点である。

$p = 2\sqrt{3}$ より、点Pの $y$ 座標は $\frac{p^2}{2} = 6$ であるから  $OM = 6$

よって  $R = \frac{2}{3} \times 6 = 4$

**Ⅱ** **解答** (1) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $n$ 項までの積が $T_n$ であるから

$$T_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$$

一方、数列 $\{T_n\}$ は $T_n = \frac{1}{2} a_n^2$ を満たすから、 $n = 1, 2, 3, \dots$ において

$$a_1 a_2 a_3 \cdots a_n = \frac{1}{2} a_n^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$a_1 > 0, a_2 > 0$ であるから、 $\textcircled{1}$ を用いて

$$n = 1 \text{ のとき } a_1 = \frac{1}{2} a_1^2$$

$$\text{ゆえに } a_1 = 2$$

$$n = 2 \text{ のとき } a_1 a_2 = \frac{1}{2} a_2^2$$

$$\text{ゆえに } a_2 = 2a_1 = 4$$

よって  $a_1 = 2, a_2 = 4 \quad \dots\dots(\text{答})$

(2)  $a_n > 0$  であるから①より,  $n \geq 2$  のとき

$$a_1 a_2 a_3 \cdots a_{n-1} = \frac{1}{2} a_n \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

また

$$a_1 a_2 a_3 \cdots a_{n-1} a_n = \frac{1}{2} a_{n+1} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

②, ③より

$$\frac{1}{2} a_{n+1} = (a_1 a_2 a_3 \cdots a_{n-1}) a_n = \frac{1}{2} a_n^2$$

ゆえに  $a_n = a_{n-1}^2$

両辺に底を 2 とする対数をとると

$$\log_2 a_n = 2 \log_2 a_{n-1}$$

$b_n = \log_2 a_n$  とおくと  $b_n = 2b_{n-1}$

また  $b_1 = \log_2 a_1 = \log_2 2 = 1$

したがって, 数列  $\{b_n\}$  は, 初項 1, 公比 2 の等比数列である。

よって, その一般項は

$$b_n = 2^{n-1} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

(3) (2)の結果から  $2^{n-1} = \log_2 a_n$

$a_n > 10^{2025}$  であるとき,  $\log_2 a_n > \log_2 10^{2025}$  より

$$2^{n-1} > \log_2 10^{2025}$$

を満たす最小の自然数  $n$  を求める。上式の右辺に底の変換公式を用いて

$$\log_2 10^{2025} = \frac{2025}{\log_{10} 2} = \frac{2025}{0.3010} = 6727. \cdots$$

一方,  $2^{11} = 2048$ ,  $2^{12} = 4096$ ,  $2^{13} = 8192$ ,  $\cdots \cdots$  であるから

$$2^{13} > 6727. \cdots > 2^{12}$$

よって, 求める  $n$  の最小値は,  $n - 1 = 13$  より

$$n = 14 \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

### Ⅲ

#### 解答

(1)  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3ax^2 - 6ax + 6a^2$  より

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 6ax - 6a = 6(x-a)(x+1)$$

$a > 0$  より, 関数  $f(x)$  の増減は右の表のようになる。このとき

$$f(-1) = 6a^2 + 3a + 1$$

$$f(a) = -a^3 + 3a^2$$

よって

極大値  $6a^2 + 3a + 1$  ( $x = -1$ ), 極小値  $-a^3 + 3a^2$  ( $x = a$ ) ……(答)

(2) 2つのさいころの目をそれぞれ  $X, Y$  とすると

$$X \neq Y \text{ のとき } |X - Y| = a$$

$$X = Y \text{ のとき } X = a$$

このとき,  $a$  の値は右の表の通りである。

3次関数のグラフ  $F$  が  $x$  軸と異なる3つの共有点をもつのは, 極大値が正, かつ, 極小値が負となる場合である。

| $X \backslash Y$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|---|---|---|---|---|---|
| 1                | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2                | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3                | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| 4                | 3 | 2 | 1 | 4 | 1 | 2 |
| 5                | 4 | 3 | 2 | 1 | 5 | 1 |
| 6                | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 6 |

ここで, (1)の結果から  $a > 0$  より, 極大値  $6a^2 + 3a + 1$  は常に正の値である。また, 極小値  $-a^3 + 3a^2 = a^2(3-a)$  が負の値になるのは

$$a = 4, 5, 6$$

このとき, 2つのさいころの目の出方は上の表から, 9通りある。

よって, 求める確率は  $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$  ……(答)

(3)  $F$  が  $x$  軸と接するのは極大値または極小値が0のときである。(2)より, (極大値)  $> 0$  なので  $-a^3 + 3a^2 = a^2(3-a) = 0$  である。

$$a > 0 \text{ より } a = 3 \text{ ……(答)}$$

※(3)の「このとき, 以下の条件を満たす領域の面積を求めよ。」については, 解答する上で問題の条件設定に不備があることが判明したため, 全員正解として扱う措置が取られたことが大学から公表されている。