

数 学

I

解答

全体集合を $U = \{1, 2, \dots, 100\}$ とし, U の部分集合のうち, 3 で割り切れる集合を A , 8 で割り切れる集合を B とする。

(i) $100 = 3 \times 33 + 1$ より $n(A) = 33$

求める個数は $n(\overline{A})$ より

$$n(\overline{A}) = n(U) - n(A) = 100 - 33 = 67$$

よって 67 個 ……(答)

(ii) $100 = 8 \times 12 + 4$ より

$$n(B) = 12 - 1 + 1 = 12$$

$$100 = 24 \times 4 + 4 \text{ より}$$

$$n(A \cap B) = 4 - 1 + 1 = 4$$

求める個数は $n(A \cup B)$ より

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 33 + 12 - 4 = 41$$

よって 41 個 ……(答)

(iii) 求める個数は $n(\overline{A \cap B})$ より

$$n(\overline{A \cap B}) = n(\overline{A \cup B}) = n(U) - n(A \cup B) = 100 - 41 = 59$$

よって 59 個 ……(答)

II

解答

(i) 3 桁の数は以下の(ア)～(エ)のいずれかの場合であり, それらは互いに排反である。

(ア) 下 2 桁が 00 であるとき

この個数は, 百の位の選び方の 3 個

(イ) 0 が十の位のみであるとき

この個数は、百の位と一の位の選び方の $3 \cdot 2 = 6$ 個

(ウ) 0 が一の位のみであるとき

この個数は、百の位と十の位の選び方の $3 \cdot 2 = 6$ 個

(エ) 0 がないとき

この個数は、百の位と十の位と一の位の選び方の $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ 個

(ア)～(エ)より、求める個数は

$$3 + 6 + 6 + 6 = 21 \text{ 個} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

(ii) 3桁の偶数は(i)の(ア), (ウ)および次の(オ)のいずれかの場合であり, それらは互いに排反である。

(オ) 一の位が2であるとき

この個数は、百の位と十の位の選び方の $2 \cdot 2 = 4$ 個

(ア), (ウ), (オ)より、求める個数は

$$3 + 6 + 4 = 13 \text{ 個} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

(iii) 2桁の数と3桁の数を同時に作る方法は以下の(カ)～(ク)のいずれかの場合であり, それらは互いに排反である。

(カ) 3桁の数の下2桁が00であるとき

この個数は、3桁の数の百の位の選び方と、2桁の数の十の位と一の位の選び方の

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \text{ 個}$$

(キ) 0 が3桁の数の一の位と2桁の数の一の位であるとき

この個数は、3桁の数の百の位と十の位と、2桁の数の十の位の選び方の

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \text{ 個}$$

(ク) 0 が3桁の数の十の位と2桁の数の一の位であるとき

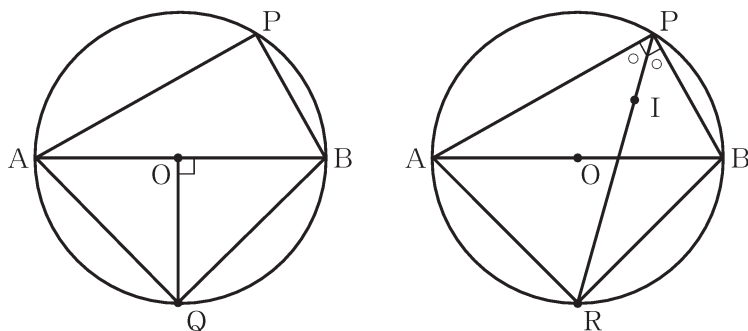
この個数は、3桁の数の百の位と一の位と、2桁の数の十の位の選び方の

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \text{ 個}$$

(カ)～(ク)より、求める組み合わせは

$$6 + 6 + 6 = 18 \text{ 通り} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

III 解答



(i) 辺 AB は外接円の直径と一致するため $\angle BPA = 90^\circ$ ……(答)

(ii) $OP \perp AB$ となるとき, $\triangle ABP$ の面積は最大値をとる。

このとき

$$\triangle ABP = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OP = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot R = R^2 \quad \dots\dots(\text{答})$$

(iii) $AB = 2R$, $BP = R$, $\angle BPA = 90^\circ$ より

$$AP = \sqrt{AB^2 - BP^2} = \sqrt{4R^2 - R^2} = \sqrt{3}R$$

$\triangle ABP$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \cdot AP \cdot BP = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}R \cdot R = \frac{\sqrt{3}}{2}R^2 \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}R^2 = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (AB + BP + AP)$$

$$\iff \frac{\sqrt{3}}{2}R^2 = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (\sqrt{3}R + 2R + R)$$

$$\iff \sqrt{3}R^2 = \sqrt{3}(\sqrt{3} + 1) \cdot R \cdot r$$

$$\iff r = \frac{1}{\sqrt{3} + 1}R = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}R \quad \dots\dots(\text{答})$$

(iv) 直線 PI と円の交点のうち, P でない方を R とする。

点 I は $\triangle ABP$ の内心なので

$$\angle APR = \frac{1}{2} \angle APB = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$$

円周角の定理より

$$\angle ABR = \angle APR = 45^\circ$$

また, $\angle ARB = 90^\circ$ より, $\triangle ABR$ は直角二等辺三角形なので, 点 R と点 Q は一致する。よって, 点 P から $\triangle ABP$ の内心 I を結ぶ直線は必ず点 Q を通る。
(証明終)

IV 解答

$$(i) \quad y = x^2 + x - a^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - a^2$$

よって、頂点の座標は $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4} - a^2\right)$ (答)

(ii) 放物線と x 軸との交点の x 座標は

$$0 = x^2 + x - a^2 \iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4a^2}}{2}$$

$b < c$ より

$$b = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4a^2}}{2}, \quad c = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4a^2}}{2} \quad \text{.....①}$$

条件より

$$\begin{aligned} c - b = 2 &\iff \frac{-1 + \sqrt{1 + 4a^2}}{2} - \frac{-1 - \sqrt{1 + 4a^2}}{2} = 2 \\ &\iff \sqrt{1 + 4a^2} = 2 \end{aligned}$$

両辺 2 乗して

$$1 + 4a^2 = 4 \iff a^2 = \frac{3}{4}$$

$$a > 0 \text{ と ① より } \quad a = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad b = -\frac{3}{2}, \quad c = \frac{1}{2} \quad \text{.....(答)}$$