

# 数 学

I

解答

$$(i) \quad \frac{1}{x} = \frac{2}{\sqrt{7} + \sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{7} - \sqrt{3})}{(\sqrt{7} + \sqrt{3})(\sqrt{7} - \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{よって, } x + \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2} = \sqrt{7} \text{ より}$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = (\sqrt{7})^2 - 2 = 5 \quad \dots\dots (\text{答})$$

(ii)  $b \neq 0$  と仮定すれば

$$a + b\sqrt{3} = 0 \iff b\sqrt{3} = -a \iff \sqrt{3} = -\frac{a}{b}$$

$\sqrt{3}$  は無理数より左辺は無理数であり,  $a, b$  は有理数より右辺は有理数なのでこの等式は矛盾する。

$$\text{よって } b = 0$$

$$\text{このとき } a + 0 \cdot \sqrt{3} = 0 \iff a = 0$$

$$\text{よって } a = b = 0$$

(証明終)

$$(iii) \quad a + b\sqrt{3} = -2 + 5\sqrt{3} \iff (a+2) + (b-5)\sqrt{3} = 0$$

$a, b$  は有理数より  $a+2, b-5$  も有理数なので, (ii)より

$$a+2 = b-5 = 0 \iff a = -2, b = 5 \quad \dots\dots (\text{答})$$

## II

## 解答

(i) 条件より

$$\begin{cases} -2=4a+2b+c & \cdots\cdots\textcircled{1} \\ 0=16a+4b+c & \cdots\cdots\textcircled{2} \\ 4=16a-4b+c & \cdots\cdots\textcircled{3} \end{cases}$$

$$\textcircled{2}-\textcircled{3}\text{より} \quad -4=8b \iff b=-\frac{1}{2}$$

このとき, ①, ②より

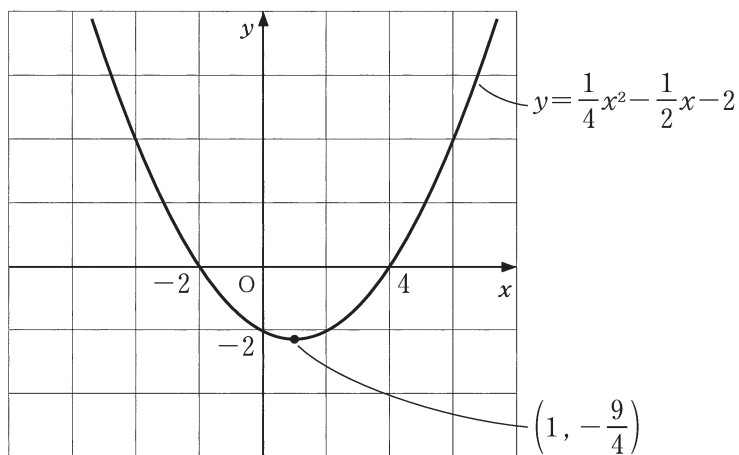
$$\begin{cases} -2=4a-1+c \\ 0=16a-2+c \end{cases} \iff \begin{cases} 4a+c=-1 \\ 16a+c=2 \end{cases}$$

$$\iff a=\frac{1}{4}, c=-2$$

$$\text{よって, } a=\frac{1}{4}, b=-\frac{1}{2}, c=-2 \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

$$(ii) (i)\text{より} \quad y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x-2=\frac{1}{4}(x-1)^2-\frac{9}{4}$$

よって, 求める2次関数のグラフは下図のようになる。



(iii) (ii)より,  $-3 \leq x \leq 3$  におけるこの2次関数は

$$x=-3 \text{ で最大値 } \frac{7}{4}, x=1 \text{ で最小値 } -\frac{9}{4} \text{ をとる。} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

### III 解答

(i)  $\triangle ABD$ ,  $\triangle CDB$  において余弦定理より

$$\begin{cases} BD^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos A = 25 - 24 \cos A & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ BD^2 = 1^2 + 3^2 - 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \cos C = 10 - 6 \cos C \end{cases}$$

$$25 - 24 \cos A = 10 - 6 \cos C$$

$$\iff 25 - 24 \cos A = 10 - 6 \cos(180^\circ - A)$$

$$\iff 25 - 24 \cos A = 10 + 6 \cos A$$

$$\iff \cos A = -\frac{1}{2}$$

$$0^\circ < A < 180^\circ \text{ より } A = 60^\circ$$

$$\text{よって } \angle A = 60^\circ \cdots \cdots (\text{答})$$

(ii) ①より,  $BD^2 = 25 - 24 \cos 60^\circ = 25 - 12 = 13$

$$BD > 0 \text{ より } BD = \sqrt{13} \cdots \cdots (\text{答})$$

(iii)  $\angle C = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

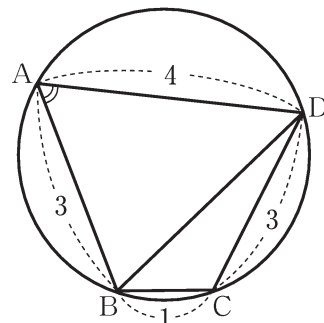
四角形 ABCD の面積を  $S$  とすれば

$$S = \triangle ABC + \triangle CDB$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \sin 120^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{15\sqrt{3}}{4} \cdots \cdots (\text{答})$$



### IV 解答

(i) 異なる 8 種類のものから重複を許して 4 個取り出して並べる総数なので

$$8^4 = (2^3)^4 = 2^{12} = 4096 \text{ 通り } \cdots \cdots (\text{答})$$

(ii) 求める事象の余事象は「アルファベットのみ, または数字のみ」なので, 求める総数は

$$4096 - (4^4 + 4^4) = 4096 - (256 + 256) = 3584 \text{ 通り } \cdots \cdots (\text{答})$$

- (iii) 4文字のうち、アルファベットが何文字目かを選ぶ方法が  ${}_4C_2$  通り  
その各々において、アルファベットと数字の選び方が  $4^2$  通りあるので  
求める総数は

$${}_4C_2 \cdot 4^2 \cdot 4^2 = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot 16 \cdot 16 = 1536 \text{ 通り} \quad \dots\dots(\text{答})$$

- (iv) (ii), (iii)より、求める総数は

$$3584 - 1536 = 2048 \text{ 通り} \quad \dots\dots(\text{答})$$

**別解** アルファベットが1個、数字が3個含まれる場合は、(iii)と同様に考えて

$${}_4C_1 \times 4^3 \cdot 4 = 1024$$

アルファベットが3個、数字が1個含まれる場合は

$${}_4C_3 \times 4^3 \cdot 4 = 1024$$

よって  $1024 + 1024 = 2048$  通り