

数 学

I

解答

$$(i) \quad \frac{1}{2-\sqrt{2}} = \frac{1}{2-\sqrt{2}} \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{2} = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$a, b \text{ は有理数より} \quad a=1, b=\frac{1}{2} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$(ii) \quad \left(\frac{1}{2-\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{6+4\sqrt{2}}{4} = \frac{3}{2} + \sqrt{2}$$

$$a, b \text{ は有理数より} \quad a=\frac{3}{2}, b=1 \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$(iii) \quad \left(\frac{1}{n-\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{n+\sqrt{2}}{n^2-2}\right)^2 = \frac{(n^2+2)+2n\sqrt{2}}{(n^2-2)^2}$$

$$= \frac{n^2+2}{(n^2-2)^2} + \frac{2n}{(n^2-2)^2} \cdot \sqrt{2}$$

n は自然数, a, b は有理数より

$$a = \frac{n^2+2}{(n^2-2)^2}, b = \frac{2n}{(n^2-2)^2} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$(iv) \quad a-b = \frac{n^2+2}{(n^2-2)^2} - \frac{2n}{(n^2-2)^2} = \frac{n^2-2n+2}{(n^2-2)^2} = \frac{(n-1)^2+1}{(n^2-2)^2} > 0$$

n は自然数より $a > b$ (証明終)

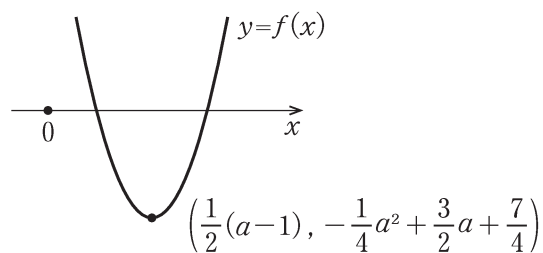
II

解答

$$f(x) = x^2 - (a-1)x + a + 2$$

$$= \left\{x - \frac{1}{2}(a-1)\right\}^2 - \frac{1}{4}a^2 + \frac{3}{2}a + \frac{7}{4}$$

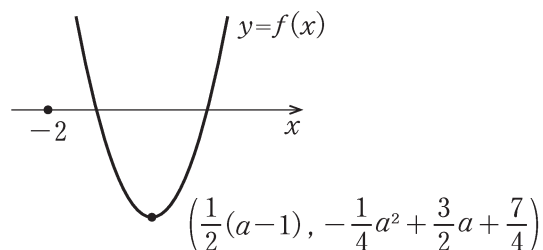
(i) 条件を満たす $y=f(x)$ のグラフは下図のようになる。



よって

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} -\frac{1}{4}a^2 + \frac{3}{2}a + \frac{7}{4} < 0 \\ \frac{1}{2}(a-1) > 0 \\ f(0) > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (a+1)(a-7) > 0 \\ a-1 > 0 \\ a+2 > 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} a < -1, \ a > 7 \\ a > 1 \\ a > -2 \end{cases} \\
 &\iff a > 7 \quad \dots\dots(\text{答})
 \end{aligned}$$

(ii) 条件を満たす $y=f(x)$ のグラフは下図のようになる。



よって

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} -\frac{1}{4}a^2 + \frac{3}{2}a + \frac{7}{4} < 0 \\ \frac{1}{2}(a-1) > -2 \\ f(-2) > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (a+1)(a-7) > 0 \\ a-1 > -4 \\ 4+2(a-1)+a+2 > 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} a < -1, \ a > 7 \\ a > -3 \\ a > -\frac{4}{3} \end{cases} \\
 &\iff -\frac{4}{3} < a < -1, \ a > 7 \quad \dots\dots(\text{答})
 \end{aligned}$$

Ⅲ

(設問省略)

Ⅳ

解答

(i) 袋Aから赤玉2個，袋Bから赤玉2個を取り出すときなので

$$\frac{{}_5C_2 \cdot {}_4C_2}{{}_{10}C_2 \cdot {}_6C_2} = \frac{\frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1}}{\frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1}} = \frac{4}{45} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(ii) 求める確率の余事象は「袋Aからも袋Bからも白球が1個も取り出されない」ときであり，その確率は

$$\frac{{}_7C_2 \cdot {}_4C_2}{{}_{10}C_2 \cdot {}_6C_2} = \frac{\frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1}}{\frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1}} = \frac{14}{75}$$

$$\text{よって，求める確率は} \quad 1 - \frac{14}{75} = \frac{61}{75} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(iii) 赤玉3個と白玉1個となるのは次の(ア)，(イ)のいずれかであり，それらは互いに排反である。

(ア) 袋Aから赤玉2個，袋Bから赤玉1個と白玉1個を取り出すとき
この確率は

$$\frac{{}_5C_2 \cdot ({}_4C_1 \cdot {}_2C_1)}{{}_{10}C_2 \cdot {}_6C_2} = \frac{\frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot 4 \cdot 2}{\frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1}} = \frac{16}{135}$$

(イ) 袋Aから赤玉1個と白玉1個，袋Bから赤玉2個を取り出すとき
この確率は

$$\frac{({}_5C_1 \cdot {}_3C_1) \cdot {}_4C_2}{{}_{10}C_2 \cdot {}_6C_2} = \frac{5 \cdot 3 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1}}{\frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1}} = \frac{2}{15}$$

(ア)，(イ)より，求める確率は

$$\frac{16}{135} + \frac{2}{15} = \frac{34}{135} \quad \dots\dots(\text{答})$$