

数 学

◀工学部（社会環境工〈環境情報コース〉・生命工）▶

1

解答

$$\begin{aligned}(1) \quad & (x+y+z+1)(x-y-z+1) - (x+y-z-1)(x-y+z-1) \\ &= \{(x+1)+(y+z)\}\{(x+1)-(y+z)\} \\ & \quad - \{(x-1)+(y-z)\}\{(x-1)-(y-z)\} \\ &= (x+1)^2 - (y+z)^2 - \{(x-1)^2 - (y-z)^2\} \\ &= x^2 + 2x + 1 - y^2 - 2yz - z^2 - (x^2 - 2x + 1 - y^2 + 2yz - z^2) \\ &= 4x - 4yz \quad \dots\dots (\text{答})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \quad a &= \frac{5}{\sqrt{10} - \sqrt{5}} = \frac{5(\sqrt{10} + \sqrt{5})}{10 - 5} = \sqrt{10} + \sqrt{5} \\ b &= \frac{5}{\sqrt{10} + \sqrt{5}} = \frac{5(\sqrt{10} - \sqrt{5})}{10 - 5} = \sqrt{10} - \sqrt{5}\end{aligned}$$

より

$$a+b=2\sqrt{10}, \quad ab=10-5=5$$

これより

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=40-10=30$$

よって

$$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2=900-2\times 25=850 \quad \dots\dots (\text{答})$$

$$(3) \quad (\sin\theta + \cos\theta)^2 = \frac{9}{25} \quad \text{より}$$

$$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{9}{25} \quad 1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{9}{25}$$

$$2\sin\theta\cos\theta=-\frac{16}{25} \quad \sin\theta\cos\theta=-\frac{8}{25} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$\sin\theta+\cos\theta=\frac{3}{5}, \quad \sin\theta\cos\theta=-\frac{8}{25} \quad \text{より } \sin\theta, \cos\theta \text{ は 2 次方程式}$$

$$x^2-\frac{3}{5}x-\frac{8}{25}=0 \text{ の 2 解である。}$$

$$25x^2-15x-8=0$$

$$x=\frac{15\pm\sqrt{225+800}}{50}=\frac{15\pm5\sqrt{41}}{50}=\frac{3\pm\sqrt{41}}{10}$$

$$0^\circ\leq\theta\leq180^\circ \text{ より } \sin\theta\geq0 \text{ なので, } \sin\theta=\frac{3+\sqrt{41}}{10} \text{ となり}$$

$$\cos\theta=\frac{3-\sqrt{41}}{10} \quad \dots\dots(\text{答})$$

2 解答

$$(1) \quad (\sqrt[3]{6})^{2x-1}=(6^{\frac{1}{3}})^{2x-1}=6^{\frac{2x-1}{3}}$$

$$36^x=(6^2)^x=6^{2x}$$

より, 変形して

$$6^{\frac{2x-1}{3}}\geq6^{2x}$$

$6>1$ であるから

$$\frac{2x-1}{3}\geq2x \quad 2x-1\geq6x \quad 4x\leq-1$$

$$x\leq-\frac{1}{4} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$(2) \quad f(x)=ax^2+bx+c \text{ より}$$

$$f'(x)=2ax+b$$

これらを $f(x)=5(x+3)f'(x)-3(x-1)^2$ へ代入して

$$ax^2+bx+c=5(x+3)(2ax+b)-3(x-1)^2$$

すなわち

$$ax^2+bx+c=(10a-3)x^2+(30a+5b+6)x+15b-3$$

これが x についての恒等式だから

$$\begin{cases} a=10a-3 & \cdots\cdots\textcircled{1} \\ b=30a+5b+6 & \cdots\cdots\textcircled{2} \\ c=15b-3 & \cdots\cdots\textcircled{3} \end{cases}$$

①より

$$9a=3 \quad a=\frac{1}{3}$$

②へ代入して

$$b=10+5b+6 \quad 4b=-16 \quad b=-4$$

③へ代入して

$$c=-60-3=-63$$

$$\text{よって} \quad a=\frac{1}{3}, \quad b=-4, \quad c=-63 \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(3) $x^2+y^2-22x-16y+172=0$ より

$$(x-11)^2+(y-8)^2=13$$

中心 $(11, 8)$, 半径 $\sqrt{13}$ である。

中心が $(5, 4)$ の円の半径を r とする。

(i) 2円が外接するとき

$$\sqrt{(11-5)^2+(8-4)^2}=r+\sqrt{13} \text{ より}$$

$$2\sqrt{13}=r+\sqrt{13} \quad r=\sqrt{13}$$

よって

$$(x-5)^2+(y-4)^2=13$$

(ii) 与えられた円が求める円に内接するとき

$$\sqrt{(11-5)^2+(8-4)^2}=r-\sqrt{13} \text{ より}$$

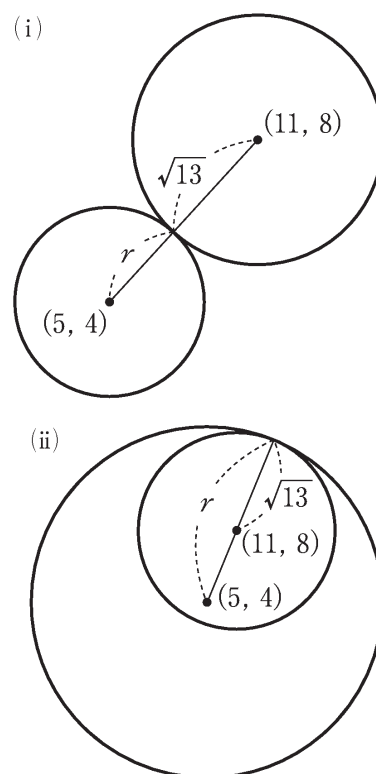
$$2\sqrt{13}=r-\sqrt{13} \quad r=3\sqrt{13}$$

よって

$$(x-5)^2+(y-4)^2=117$$

(i), (ii)より, 求める円の方程式は

$$\left. \begin{aligned} (x-5)^2+(y-4)^2 &= 13 \\ (x-5)^2+(y-4)^2 &= 117 \end{aligned} \right\} \cdots\cdots(\text{答})$$



$$\begin{aligned}
 (1) \quad f(x) &= \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x + 1 \\
 &= 2 \left(\sin 2x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos 2x \cdot \frac{1}{2} \right) + 1 \\
 &= 2 \left(\sin 2x \cos \frac{\pi}{6} + \cos 2x \sin \frac{\pi}{6} \right) + 1 \\
 &= 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) + 1
 \end{aligned}$$

$f(x)=0$ とおくと

$$2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) = -1$$

$$\sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ より } -\frac{5\pi}{6} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{6} \text{ だから}$$

$$2x + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}, \quad -\frac{\pi}{6}, \quad \frac{7\pi}{6}$$

$$x = -\frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{2} \quad \dots\dots (\text{答})$$

$$(2) \quad f(x) = 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) + 1 \text{ より}$$

$$f'(x) = 4 \cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$f'(x)=0 \text{ となる } x \text{ の値は, } -\frac{5\pi}{6} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{6} \text{ より}$$

$$2x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} \quad x = -\frac{\pi}{3}, \quad \frac{\pi}{6}$$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\dots$	$-\frac{\pi}{3}$	$\dots$	$\frac{\pi}{6}$	$\dots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0

$$x = -\frac{\pi}{3} \text{ のとき極小値 } -2 + 1 = -1 \quad \dots\dots (\text{答})$$

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ のとき極大値 } 2+1=3 \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

(3) グラフは右図のようになるので

$$S = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}} \left\{ 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 1 \right\} dx$$

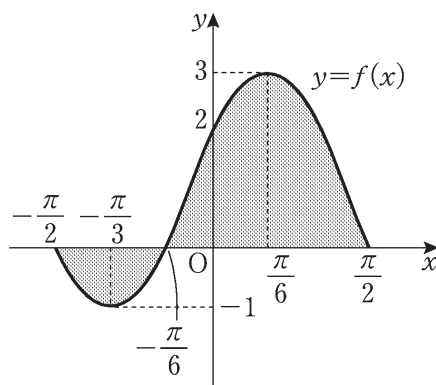
$$+ \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 1 \right\} dx$$

$$= - \left[-\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}}$$

$$+ \left[-\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + x \right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{2} \right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$= 2\sqrt{3} + \frac{\pi}{3} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$



4

解答

(1) 1 から 6 までの目から異なる 3 つを選べば $a_1 < a_2 < a_3$ となる (a_1, a_2, a_3) が決まるから

$${}_6C_3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20 \text{ 通り} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

(2) 1 から 6 までの 6 種類の目から重複を許して 3 つ選べば $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ となる (a_1, a_2, a_3) が決まるので, 3 つの「○」と 5 つの「|」の順列を考えて

$${}_8C_5 = {}_8C_3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 \text{ 通り} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

(注) 3 つの「○」と 5 つの「|」の順列は次のような意味である。

$$\bigcirc || \bigcirc | \bigcirc || \iff (1, 3, 4) \quad | \bigcirc \bigcirc |||| \bigcirc \iff (2, 2, 6)$$

$$|| \bigcirc \bigcirc \bigcirc ||| \iff (3, 3, 3)$$

このように対応させると, $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ となる (a_1, a_2, a_3) と 3 つの「○」と 5 つの「|」の順列が 1 対 1 に対応する。

(3) (2)と同様に n 個の「○」と 5 つの「|」の順列を考えて

$${}_{n+5}C_5 = \frac{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$= \frac{1}{120} (n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5) \text{ 通り} \quad \dots\dots (\text{答})$$

5 解答

(1) $2025_{(8)}$ を 10 進法で表すと

$$\begin{aligned} 2025_{(8)} &= 2 \times 8^3 + 2 \times 8 + 5 \\ &= 1024 + 16 + 5 = 1045 \end{aligned}$$

1045 を 2 進法で表すと

$$1045 = 10000010101_{(2)} \quad \dots\dots (\text{答})$$

別解 $2025_{(8)} = 2 \times 8^3 + 2 \times 8 + 5$

$$\begin{aligned} &= 2 \times 2^9 + 2 \times 2^3 + 2^2 + 1 \\ &= 2^{10} + 2^4 + 2^2 + 1 \end{aligned}$$

よって $10000010101_{(2)}$

(2) $15857 = 10807 \times 1 + 5050$

$$10807 = 5050 \times 2 + 707$$

$$5050 = 707 \times 7 + 101$$

$$707 = 101 \times 7$$

よって、15857 と 10807 の最大公約数は 101 である。

$$\frac{15857}{10807} = \frac{157}{107} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(3) $x^4 + y^2 = 2025$ より $y^2 = 2025 - x^4$

$$y^2 \geq 1 \text{ より } 2025 - x^4 \geq 1 \quad x^4 \leq 2024$$

これを満たす自然数 x の範囲は

$$1 \leq x \leq 6$$

$$x=1 \text{ のとき } y^2 = 2024$$

$$x=2 \text{ のとき } y^2 = 2009$$

$$x=3 \text{ のとき } y^2 = 1944$$

$$x=4 \text{ のとき } y^2 = 1769$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 1045} \\ 2 \overline{) 522} \cdots 1 \\ 2 \overline{) 261} \cdots 0 \\ 2 \overline{) 130} \cdots 1 \\ 2 \overline{) 65} \cdots 0 \\ 2 \overline{) 32} \cdots 1 \\ 2 \overline{) 16} \cdots 0 \\ 2 \overline{) 8} \cdots 0 \\ 2 \overline{) 4} \cdots 0 \\ 2 \overline{) 2} \cdots 0 \\ 2 \overline{) 1} \cdots 0 \\ 0 \cdots 1 \end{array}$$

$$x=5 \text{ のとき } y^2=1400$$

となり、いずれも自然数 y は存在しない。

$$x=6 \text{ のとき } y^2=729$$

これを満たす自然数 y は $y=27$

以上より $(x, y)=(6, 27) \dots\dots(\text{答})$

6

解答

(1) $a_1=1, a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$) より, $\{a_n\}$ は初項 1, 公比

$\frac{1}{2}$ の等比数列だから

$$a_n=1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \dots\dots(\text{答})$$

$$(2) \quad b_{n+1}=\frac{2}{3}b_n+\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

両辺に 2^n をかけて

$$2^n b_{n+1}=\frac{4}{3} \cdot 2^{n-1} b_n+1$$

$$d_n=2^{n-1}b_n \text{ より } d_{n+1}=\frac{4}{3}d_n+1$$

よって, $d_{n+1}+3=\frac{4}{3}(d_n+3)$ と変形できる。

$d_1+3=b_1+3=3$ から, $\{d_n+3\}$ は初項 3, 公比 $\frac{4}{3}$ の等比数列より

$$d_n+3=3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

$$d_n=3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}-3 \dots\dots(\text{答})$$

$$(3) \quad b_n=\frac{1}{2^{n-1}}d_n=\frac{1}{2^{n-1}}\left\{3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}-3\right\}=3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

より

$$c_{n+1}=c_n+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$e_n = c_{n+1} - c_n$ とおくと

$$e_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} c_n &= c_1 + \sum_{k=1}^{n-1} e_k \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \right\} \\ &= \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1 - \frac{2}{3}} - \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 3 - 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + 1 \end{aligned}$$

$c_1 = 0$ はこれに含まれる。よって

$$c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + 1 \quad \dots\dots (\text{答})$$